

The Kramers problem for quantum bose-gases with constant collision frequency and specular–diffusive boundary conditions

E. A. Bedrikova¹ and A. V. Latyshev²

*Faculty of Physics and Mathematics,
Moscow State Regional University, 105005,
Moscow, Radio str., 10–A*

Содержание

1	Введение. О точных решениях граничных задач кинетической теории	2
1.1	История проблемы	3
1.2	Обобщенный метод источника	6
1.3	Изотермическое скольжение вдоль плоской поверхности . .	8
2	Кинетическое уравнение для квантовых Бозе–газов с постоянной частотой столкновений	11
2.1	Вывод уравнения	11
2.2	Предельный случай уравнения	18
2.3	Постановка задачи Крамерса	19
3	Включение граничных условий в кинетическое уравнение	20
4	Кинетическое уравнение во втором и четвертом квадрантах фазового пространства	24
5	Характеристическая система	26

¹bedrikova@mail.ru

²avlatyshev@mail.ru

6	Ряд Неймана	28
6.1	Нулевое приближение	29
6.2	Первое приближение	31
6.3	Второе приближение	34
6.4	Высшие приближения	36
7	Сравнение с точным решением. Скорость скольжения	38
8	Профиль скорости газа в полупространстве и ее значение у стенки	41
9	Приведение формул к размерному виду	42
10	Заключение	50
	Список литературы	51

The Kramers problem for quantum Bose-gases with specular-diffuse boundary conditions of the kinetic theory is considered. On an example of Kramers problem the new generalized method of a source of the decision of the boundary problems from the kinetic theory is developed. The method allows to receive the decision with any degree of accuracy. At the basis of a method lays the idea of representation of a boundary condition on distribution function in the form of a source in the kinetic equation. By means of integrals Fourier the kinetic equation with a source is reduced to the integral equation of Fredholm type of the second kind. The decision is received in the form of Neumann's series.

Key words: quantum Bose-gas, constant collision frequency, the Kramers problem, reflection-diffusion boundary conditions, the Neumann series.

PACS numbers: 51. Physics of gases, 51.10.+y Kinetic and transport theory of gases.

1 Введение. О точных решениях граничных задач кинетической теории

Задача Крамерса является одной из важнейших задач кинетической

теории газов. Эта задача имеет большое практическое значение. Решение этой задачи изложено в таких монографиях, как [1] и [2].

1.1 История проблемы

Более полувека тому назад К. М. Кейз в своей знаменитой работе [3] заложил основы аналитического решения граничных задач теории переноса. Идея этого метода состояла в следующем: найти общее решение неоднородного характеристического уравнения, отвечающего уравнению переноса, в классе обобщенных функций в виде суммы двух обобщенных функций – главного значения интеграла и слагаемого, пропорционального дельта-функции Дирака.

Первое из этих слагаемых является частным решением неоднородного характеристического уравнения, а второе является общим решением соответствующего однородного уравнения, отвечающего неоднородному характеристическому. Коэффициентом пропорциональности в этом выражении стоит так называемая дисперсионная функция. Нули дисперсионной функции связаны взаимно однозначно с частными решениями исходного уравнения переноса.

К характеристическому уравнению мы приходим после экспоненциального разделения переменных в уравнении переноса. С помощью спектрального параметра мы разделяем пространственную и скоростную переменные в уравнении переноса.

Общее решение характеристического уравнения содержит в качестве частного решения сингулярное ядро Коши, знаменатель которого есть разность скоростной и спектральной переменной.

Именно ядро Коши позволяет использовать всю мощь методов теории функций комплексного переменного – в частности, теории краевых задач Римана–Гильберта.

Итак, построение собственных функций характеристического уравнения приводит к понятию дисперсионного уравнения, корни которого на-

ходятся во взаимно однозначном соответствии с частными (дискретными) решениями исходного уравнения переноса.

Общее решение граничных задач для уравнения переноса ищется в виде линейной комбинации дискретных решений с произвольными коэффициентами (эти коэффициенты называются дискретными коэффициентами) и интеграла по спектральному параметру от собственной функции непрерывного спектра, умноженных на неизвестную функцию (коэффициент непрерывного спектра). Некоторые дискретные коэффициенты задаются и считаются известными. Дискретные коэффициенты отвечают дискретному спектру, или, в некоторых случаях, отвечают спектру, присоединенному к непрерывному.

Подстановка общего решения в граничные условия приводит к интегральному сингулярному уравнению с ядром Коши. Решение этого уравнения позволяет построить решение исходной граничной задачи для уравнения переноса.

Действуя именно таким способом, К. Черчиньяни в 1962 г. в работе [4] построил точное решение задачи Крамерса об изотермическом скольжении. Эта задача является важной содержательной задачей кинетической теории.

Работы [3, 4] заложили основы аналитических методов для получения точных решений модельных кинетических уравнений.

Затем в работах [5]–[8] Черчиньяни и его соавторы получили ряд значительных результатов для кинетической теории газов. Эти результаты получили дальнейшее обобщение в наших последующих работах.

Обобщение этого метода на векторный случай (системы кинетических уравнений) наталкивается на значительные трудности (см., например, [9]). С такими трудностями столкнулись авторы работ [9, 10, 11], в которых делались попытки решить задачу о температурном скачке (задача Смолуховского).

Преодолеть эти трудности удалось в работе [12], в которой впервые дано решение задачи Смолуховского. Затем эта задача была обобщена на случай слабого испарения [13]–[14], на молекулярные газы [15] и [16],

на безмассовые Бозе–газы [17], на скачок температуры в металле (случай вырожденной плазмы) [18] и [19], и на другие проблемы [20] и [21].

Затем в работах [22] и [23] было дано решение задачи об умеренно сильном испарении (конденсации). Одномерная задача о сильном испарении была поставлена в работе [24] и была сделана попытка получить ее точное решение.

Задача о температурном скачке для БГК–уравнения с частотой столкновений, пропорциональной модулю скорости молекул, была решена методом Винера–Хопфа в работе [25]. Затем в более общей постановке с учетом слабого испарения (конденсации) эта задача была решена методом Кейза в нашей работе [26].

Задача Крамерса в дальнейшем была обобщена на случай бинарных газов [27]–[30], была решена с использованием высших моделей уравнения Больцмана [31]–[33], была обобщена на случай зеркально–диффузных граничных условий [34]–[36].

Нестационарные задачи для кинетических уравнений рассматривались в наших работах [37] и [38].

Различные проблемы теории скин–эффекта рассматривались в работах [39]–[42].

В последнее десятилетие задачи Крамерса и Смолуховского были сформулированы и аналитически решены для квантовых Ферми–газов в работах [43] и [44].

Вопросам теории плазмы посвящены наши работы [45]–[57].

В наших работах [58]–[65] были развиты приближенные методы решения граничных задач кинетической теории с зеркально–диффузными граничными условиями.

В настоящей работе применяется новый эффективный метод решения граничных задач с зеркально–диффузными граничными условиями, развитый в работе [66].

Настоящая работа является продолжением работ [67] и [68]. В [67] была решена полупространственная задача Крамерса для квантовых Бозе–газов: найдена скорость изотермического скольжения вдоль плоской по-

верхности и построена функция распределения летящих к стенке молекул непосредственно у стенки.

В работе [68] для задачи Крамерса построено распределение массовой скорости Бозе–газа в полупространстве и находится ее значение непосредственно у стенки. Для этого выводится формула факторизации дисперсионной функции. Проводится сравнение коэффициентов массовой скорости Бозе– и Ферми–газов.

В настоящей работе решается полупространственная задача Крамерса для квантовых Бозе–газов с зеркально–диффузными граничными условиями. Для квантовых Ферми–газов такая задача была решена в работе [69].

1.2 Обобщенный метод источника

В основе предлагаемого метода лежит идея включить граничное условие на функцию распределения в виде источника в кинетическое уравнение. Так что предлагаемый метод можно называть обобщенным методом источника.

Суть предлагаемого метода состоит в следующем. Сначала формулируется в полупространстве $x > 0$ классическая задача Крамерса об изотермическом скольжении с зеркально–диффузными граничными условиями. Затем функция распределения продолжается в сопряженное полупространство $x < 0$ четным образом по пространственной и по скоростной переменным. В полупространстве $x < 0$ также формулируется задача Крамерса.

После того как получено линеаризованное кинетическое уравнение разобьем искомую функцию (которую также будем называть функцией распределения) на два слагаемых: чепмен–энскоговскую функцию распределения $h_{as}(x, \mu)$ и вторую часть функции распределения $h_c(x, \mu)$, отвечающей непрерывному спектру:

$$h(x, \mu) = h_{as}(x, \mu) + h_c(x, \mu),$$

($as \equiv asymptotic, c \equiv continuous$).

В силу того, что чепмен—энскоговская функция распределения есть линейная комбинация дискретных решений исходного уравнения, функция $h_c(x, \mu)$ также является решением кинетического уравнения. Функция $h_c(x, \mu)$ обращается в нуль вдали от стенки. На стенке эта функция удовлетворяет зеркально-диффузному граничному условию.

Далее мы преобразуем кинетическое уравнение для функции $h_c(x, \mu)$, включив в это уравнение в виде члена типа источника, лежащего в плоскости $x = 0$, граничное условие на стенке для функции $h_c(x, \mu)$. Подчеркнем, что функция $h_c(x, \mu)$ удовлетворяет полученному кинетическому уравнению в обоих сопряженных полупространствах $x < 0$ и $x > 0$.

Это кинетическое уравнение мы решаем во втором и четвертом квадрантах фазовой плоскости (x, μ) как линейное дифференциальное уравнение первого порядка, считая известным массовую скорость газа $U_c(x)$. Из полученных решений находим граничные значения неизвестной функции $h^\pm(x, \mu)$ при $x = \pm 0$, входящие в кинетическое уравнение.

Теперь мы разлагаем в интегралы Фурье неизвестную функцию $h_c(x, \mu)$, неизвестную массовую скорость $U_c(x)$ и дельта-функцию Дирака. Граничные значения неизвестной функции $h_c^\pm(0, \mu)$ при этом выражаются одним и тем же интегралом на спектральную плотность $E(k)$ массовой скорости.

Подстановка интегралов Фурье в кинетическое уравнение и выражение массовой скорости приводит к характеристической системе уравнений. Если исключить из этой системы спектральную плотность $\Phi(k, \mu)$ функции $h_c(x, \mu)$, мы получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

Считая градиент массовой скорости заданным, разложим неизвестную скорость скольжения, а также спектральные плотности массовой скорости и функции распределения в ряды по степеням коэффициента диффузности q (это ряды Неймана). На этом пути мы получаем счетную систему зацепленных уравнений на коэффициенты рядов для спектральных плотностей. При этом все уравнения на коэффициенты спектраль-

ной плотности для массовой скорости имеют особенность (полюс второго порядка в нуле). Исключая эти особенности последовательно, мы построим все члены ряда для скорости скольжения, а также ряды для спектральных плотностей массовой скорости и функции распределения.

1.3 Изотермическое скольжение вдоль плоской поверхности

Изложим физику скольжения газа вдоль плоской поверхности.

Пусть газ занимает полупространство $x > 0$ над твердой плоской неподвижной стенкой. Возьмем декартову систему координат с осью x , перпендикулярной стенке, и с плоскостью (y, z) , совпадающей со стенкой, так что начало координат лежит на стенке.

Предположим, что вдали от стенки и вдоль оси y задан градиент массовой скорости газа, величина которого равна g_v :

$$g_v = \left(\frac{du_y(x)}{dx} \right)_{x=+\infty}.$$

Задание градиента массовой скорости газа вызывает течение газа вдоль стенки. Рассмотрим это течение в отсутствии тангенциального градиента давления и при постоянной температуре. В этих условиях массовая скорость газа будет иметь только одну тангенциальную составляющую $u_y(x)$, которая вдали от стенки будет меняться по линейному закону. Отклонение от линейного распределения будет происходить вблизи стенки в слое, часто называемом слоем Кнудсена, толщина которого имеет порядок длины свободного пробега l . Вне слоя Кнудсена течение газа описывается уравнениями Навье—Стокса. Явление движения газа вдоль поверхности, вызываемое градиентом массовой скорости, заданным вдали от стенки, называется изотермическим скольжением газа.

Для решения уравнений Навье—Стокса требуется поставить граничные условия на стенке. В качестве такого граничного условия принимается экстраполированное значение гидродинамической скорости на поверхности — величина u_{sl} .

Отметим, что реальный профиль скорости в слое Кнудсена отличен от гидродинамического. Для получения величины u_{sl} требуется решить уравнение Больцмана в слое Кнудсена. При малых градиентах скорости имеем:

$$u_{sl} = K_v l G_v, \quad G_v = \left(\frac{du_y(x)}{dx} \right)_{x=+\infty}.$$

Задача нахождения скорости изотермического скольжения u_{sl} называется задачей Крамерса (см., например, [1]. Определение величины u_{sl} позволяет, как увидим ниже, полностью построить функцию распределения газовых молекул в данной задаче, найти профиль распределения в полупространстве массовой скорости газа, а также найти значение массовой скорости газа на границе полупространства.

Настоящая работа посвящена изучению влияния квантовых эффектов на кинетические явления в разреженных Бозе-газах. Рассмотрение ведется на примере классической задачи об изотермическом скольжении газа (задача Крамерса) вдоль плоской поверхности [1] и [2]. Рассматриваются как диффузные граничные условия, так и зеркально-диффузные граничные условия Максвелла.

Граничные условия, описывающие взаимодействие молекул газа с поверхностью конденсированной фазы, привлекают внимание исследователей в течение длительного времени. Эта проблема по-прежнему остается открытой, в частности, для реальных поверхностей. В конкретных задачах используются главным образом модельные граничные условия. Одно из таких условий — это зеркально-диффузные граничные условия Максвелла. Все параметры отраженных молекул в задачах скольжения определяются при этом одной величиной — коэффициентом зеркальности, который часто отождествляют с коэффициентом аккомодации тангенциального импульса молекул.

При наличии вдали от поверхности градиента тангенциальной к поверхности компоненты скорости газа возникает скольжение газа вдоль поверхности. Такое скольжение называется изотермическим [1] и [2]. Задача Крамерса (см. [1]–[8]) состоит в нахождении скорости изотермиче-

ского скольжения газа.

Пусть газ занимает полупространство $x > 0$ над плоской твердой стенкой и движется вдоль оси y со средней (массовой) скоростью $u_y(x)$. Вдали от поверхности на расстоянии много большем средней длины свободного пробега частиц газа имеется градиент массовой (средней) скорости газа

$$g_v = \left(\frac{du_y(x)}{dx} \right)_{x \rightarrow +\infty},$$

т.е. профиль массовой скорости вдали от стенки можно представить в виде

$$u_y(x) = u_{sl} + g_v x, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Наличие градиента массовой скорости вызывает скольжение газа вдоль поверхности, называемое изотермическим. Величина u_{sl} называется скоростью изотермического скольжения ($sl \equiv sliding \equiv$ скольжение).

При малых градиентах g_v скорость изотермического скольжения пропорциональна величине градиента:

$$u_{sl} = C_m l g_v. \quad (1.1)$$

Здесь C_m – коэффициент изотермического скольжения, l – средняя длина свободного пробега частиц.

Величина C_m определяется кинетическими процессами вблизи поверхности. Для ее определения необходимо решить кинетическое уравнение в так называемом слое Кнудсена, т.е. в слое газа, примыкающего к поверхности, толщиной порядка длины свободного пробега l .

В качестве кинетического уравнения рассмотрим обобщение на квантовый случай БГК-уравнения (Бхатнагар, Гросс, Крук)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla f) = \nu (f_{eq} - f). \quad (1.2)$$

Здесь f – функция распределения молекул по скоростям, \mathbf{v} – скорость молекул, ν – эффективная частота столкновений молекул, f_{eq} – локально равновесная функция распределения,

$$f_{eq} = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2}{2kT} \right].$$

Величины n , T , \mathbf{u} зависят, вообще говоря, от координаты \mathbf{r} и определяются как

$$n = \int f d^3v, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{n_{eq}} \int \mathbf{v} f d^3v, \quad (1.4)$$

$$T = \frac{2}{3kn} \int \frac{m}{2} (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 f d^3v \quad (1.5)$$

Числовая плотность (концентрация) n квантового газа и его температура T в задаче Крамерса считаются постоянными.

2 Кинетическое уравнение для квантовых Бозе–газов с постоянной частотой столкновений

2.1 Вывод уравнения

Рассмотрим обобщение кинетического уравнения (1.2) на случай квантового Бозе–газа. Функцию f_{eq} в (1.2) теперь будем понимать как локально–равновесную функцию Бозе

$$f_{eq} = \frac{1}{-1 + \exp\left(\frac{\mathcal{E}_* - \mu}{kT}\right)}, \quad \mathcal{E}_* = \frac{m}{2} (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2.$$

Здесь μ – химический потенциал молекул [8], $-\infty < \mu \leq 0$.

Вместо соотношений (1.3)–(1.5) теперь имеем следующие соотношения, вытекающие из законов сохранения числа частиц, импульса и энергии:

$$\int f_{eq} R_i d\Omega = \int f R_i d\Omega. \quad (2.1)$$

Здесь

$$d\Omega = \frac{(2s+1)m^3}{(2\pi\hbar)^3} d^3v,$$

s – спин ферми-частицы, $R_1 = 1$, $R_2 = v_x$, $R_3 = v_y$, $R_4 = v_z$, $R_5 = \mathcal{E}_*$.

Рассмотрим теперь применение кинетического уравнения (1.2) к задаче о вычислении скорости изотермического скольжения квантового Бозе-газа. При этом ограничимся рассмотрением малых градиентов g_v , что позволяет линеаризовать задачу. В этом случае температура и концентрация газа постоянны. Из соотношений (2.1) следует, что величина \mathbf{u} совпадает с массовой скоростью газа (1.4). Кроме того, течение газа предположим стационарным.

Линеаризуем задачу относительно равновесной функции распределения Бозе–Эйнштейна (бозеана) f_B

$$f_B = \frac{1}{-1 + \exp\left(\frac{\mathcal{E} - \mu}{kT}\right)}, \quad \mathcal{E} = \frac{mv^2}{2}.$$

Начнем с линеаризации локально равновесной функции распределения f_{eq} . Ее линеаризуем относительно бозеана f_B по массовой скорости \mathbf{u} :

$$f_{eq} = f_{eq}\Big|_{\mathbf{u}=0} + \frac{\partial f_{eq}}{\partial \mathbf{u}}\Big|_{\mathbf{u}=0} \cdot \mathbf{u},$$

что приводит к выражению

$$f_{eq} = f_B(v) + g_F(v) \frac{mv_y}{kT} u_y, \quad (2.2)$$

в котором $f_B(v)$ – абсолютный бозеан (см. рис. 1),

$$f_B(v) = \frac{1}{-1 + \exp\left(\frac{mv^2}{2kT} - \frac{\mu}{kT}\right)}$$

и

$$g_B(v) = \frac{\exp\left(\frac{mv^2}{2kT} - \frac{\mu}{kT}\right)}{\left[-1 + \exp\left(\frac{mv^2}{2kT} - \frac{\mu}{kT}\right)\right]^2}.$$

Функция $g_F(v)$ называется функцией Эйнштейна (см. рис. 2).

Введем безразмерную скорость $\mathbf{C} = \sqrt{\beta} \mathbf{v}$, $\beta = \frac{m}{2kT}$, и безразмерный (приведенный) химический потенциал $\alpha = \frac{\mu}{kT}$. В этих переменных выражение (2.2) записывается как

$$f_{eq} = f_B(C) + 2g_B(C)C_y U_y(x), \quad (2.3)$$

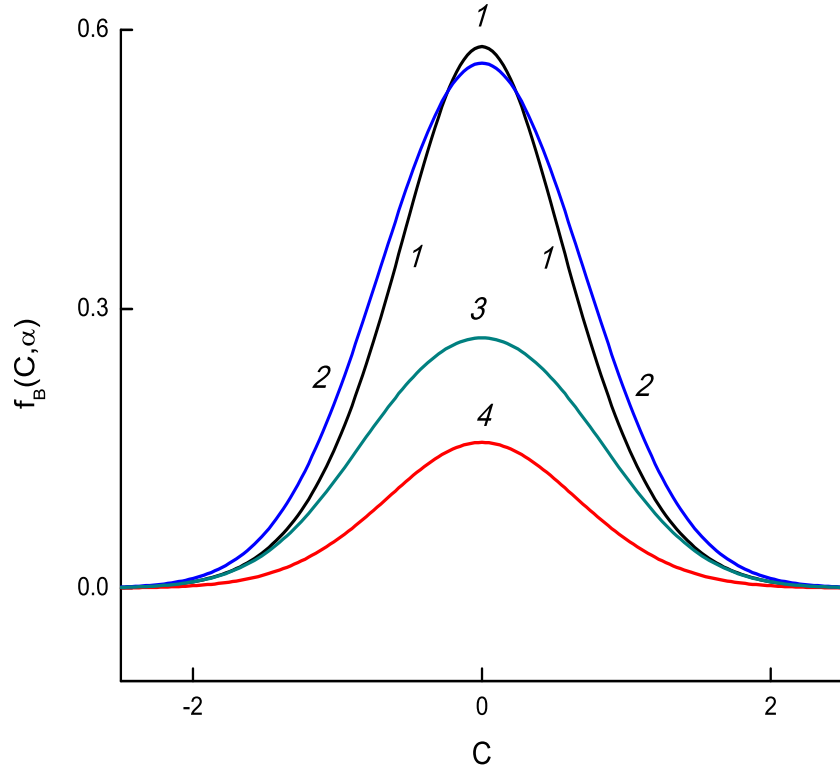


Рис. 1: Поведение абсолютного бозеана при значениях безразмерного химпотенциала $\alpha = -1$ (кривая 1) и $\alpha = -2$ (кривая 4), абсолютного максвеллиана $f_M(c) = \exp(-c^2)/\sqrt{\pi}$ (кривая 2) и абсолютного фермиана (кривая 3) при $\alpha = -1$.

при этом в (2.3) $U_y(x) = \sqrt{\beta}u_y(x)$ – безразмерная массовая скорость,

$$f_B(C) = \frac{1}{-1 + \exp(C^2 - \alpha)}, \quad g_B(C) = \frac{\exp(C^2 - \alpha)}{[-1 + \exp(C^2 - \alpha)]^2},$$

(графики этих функций см. на рис. 1 и 2).

Согласно (2.3) функцию распределения будем искать в виде

$$f = f(x, \mathbf{C}) = f_B(C) + g_B(C)C_y h(x, C_x). \quad (2.4)$$

Подставляя (2.3) и (2.4) в уравнение (1.2), приходим к уравнению

$$C_x \frac{\partial h}{\partial x} = \nu \sqrt{\beta} (2U_y(x) - h(x, C_x)).$$

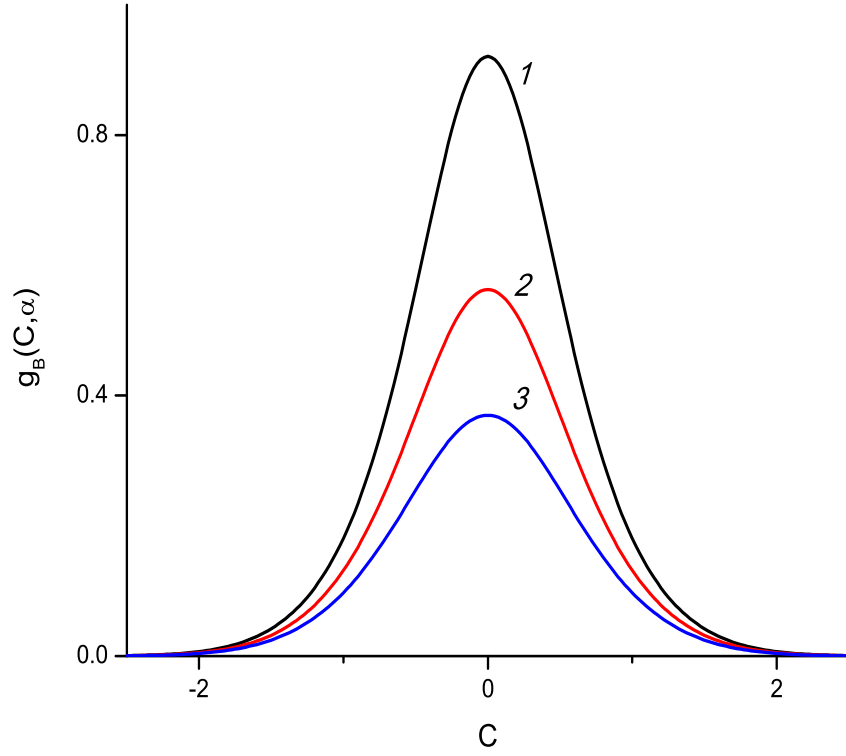


Рис. 2: Поведение функции $g_B(c, \alpha) = \frac{\partial f_B(c, \alpha)}{\partial \alpha}$ при значениях безразмерного химпотенциала $\alpha = -1, -1.25, -1.5$ (кривые 1, 2, 3)

Далее удобно ввести безразмерную координату $x_1 = x\nu\sqrt{\beta}$. Получим следующее уравнение

$$C_x \frac{\partial h}{\partial x_1} = 2U_y(x_1) - h_1(x_1, C_x). \quad (2.5)$$

Размерный градиент $g_v = \left(\frac{du_y(x)}{dx} \right)_{x \rightarrow +\infty}$ при переходе к безразмерной координате x_1 преобразуется следующим образом:

$$G_v = \left(\frac{dU_y(x_1)}{dx_1} \right)_{x_1 \rightarrow +\infty} = \sqrt{\beta} \left(\frac{du_y}{dx} \right)_{x \rightarrow +\infty} \cdot \frac{dx}{dx_1},$$

откуда

$$G_v = \frac{g_v}{\nu}.$$

Массовая скорость газа может быть найдена из закона сохранения импульса (2.1), который в безразмерных параметрах имеет вид

$$\int C_y(f_{eq} - f)d\Omega = 0,$$

или,

$$\int C_y^2 g_B(C) [2U_y(x_1) - h(x_1, C_x)] d^3C = 0,$$

откуда получаем

$$U_y(x_1) = \frac{\int C_y^2 g_B(C) h(x_1, C_x) d^3C}{2 \int C_y^2 g_B(C) d^3C}. \quad (2.6)$$

Заметим, что после линеаризации массовой скорости (1.4), т.е. после подстановки в (1.4) выражения (2.4), приходим к следующему выражению

$$U_y(x_1) = \frac{\int C_y^2 g_B(C) h(x_1, C_x) d^3C}{\int f_B(C) d^3C}. \quad (2.7)$$

Знаменатели в (2.6) и (2.7) имеют различные выражения. Покажем, что эти выражения совпадают.

Перейдем к сферическим координатам

$$C_x = C \cos \theta, \quad C_y = C \sin \theta \cos \varphi, \quad C_z = C \sin \theta \sin \varphi,$$

$$d^3C = C^2 \sin \theta d\varphi dC.$$

Теперь получаем, что знаменатель из (2.7) равен

$$\int f_B(C) d^3C = 4\pi \int \frac{C^2 dC}{-1 + \exp(C^2 - \alpha)} = 4\pi f_2^B(\alpha),$$

где $f_2^B(\alpha)$ – второй (второго порядка) полупространственный момент абсолютного бозеана

$$f_2^F(\alpha) = \int_0^\infty f_B(C) C^2 dC.$$

После интегрирования по частям получаем $f_2^B(\alpha) = -\frac{1}{2}l_0^B(\alpha)$, где

$$l_0^B(\alpha) = \int_0^\infty \ln(1 - \exp(\alpha - C^2))dC = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \ln(1 - \exp(\alpha - C^2))dC.$$

Знаменатель из (2.6) равен

$$2 \int C_y^2 g_B(C) d^3C = \frac{8\pi}{3} g_4^B(\alpha),$$

где

$$g_4^B(\alpha) = \frac{3}{2} f_2^B(\alpha).$$

Следовательно, знаменатель из (2.6) равен:

$$2 \int C_y^2 g_B(C) d^3C = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{3}{2} f_2^B(\alpha),$$

что и означает совпадение формул (2.6) и (2.7).

В числителе (2.6) удобнее перейти к цилиндрическим координатам, полагая $C^2 = C_x^2 + C_\perp^2$, $C_y = C_\perp \sin \varphi$, $d^3C = C_\perp dC_\perp dC_x d\varphi$. Далее получаем:

$$\begin{aligned} \int C_y^2 g_B(C) h(x_1, C_x) d^3C &= \int_{-\infty}^\infty h(x_1, C_x) dC_x \int_0^\infty C_\perp^3 g_B(C) dC_\perp \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= \pi \int_{-\infty}^\infty h(x_1, C_x) dC_x \int_0^\infty \frac{\exp(C_x^2 + C_\perp^2 - \alpha) C_\perp^3 dC_\perp}{[-1 + \exp(C_x^2 + C_\perp^2 - \alpha)]^2}. \end{aligned}$$

Вычисляя внутренний интеграл по частям, имеем:

$$\int C_y^2 g_B(C) h(x_1, C_x) d^3C = -\frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^\infty \ln(1 - \exp(\alpha - C_x^2)) h(x_1, C_x) dC_x.$$

Следовательно, массовая скорость вычисляется по формуле

$$U_y(x_1) = \frac{1}{4l_0^B(\alpha)} \int_{-\infty}^\infty \ln(1 - \exp(\alpha - C_x^2)) h(x_1, C_x) dC_x. \quad (2.8)$$

Введем функцию

$$K_B(\mu, \alpha) = \frac{\ln(1 - \exp(\alpha - \mu^2))}{2l_0^B(\alpha)} = \frac{\ln(1 - \exp(\alpha - \mu^2))}{\int_{-\infty}^{\infty} \ln(1 - \exp(\alpha - \tau^2)) d\tau}, \quad (2.9)$$

где $\mu = C_x$.

Эта функция обладает свойством

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_B(\mu, \alpha) d\mu \equiv 1, \quad \forall \alpha \in (-\infty, +\infty).$$

Семейство функций $K_B(\mu, \alpha) = \frac{\ln(1 - e^{\alpha - \mu^2})}{2l_0^B(\alpha)}$ называется ядром кинетического уравнения (см. рис. 3).

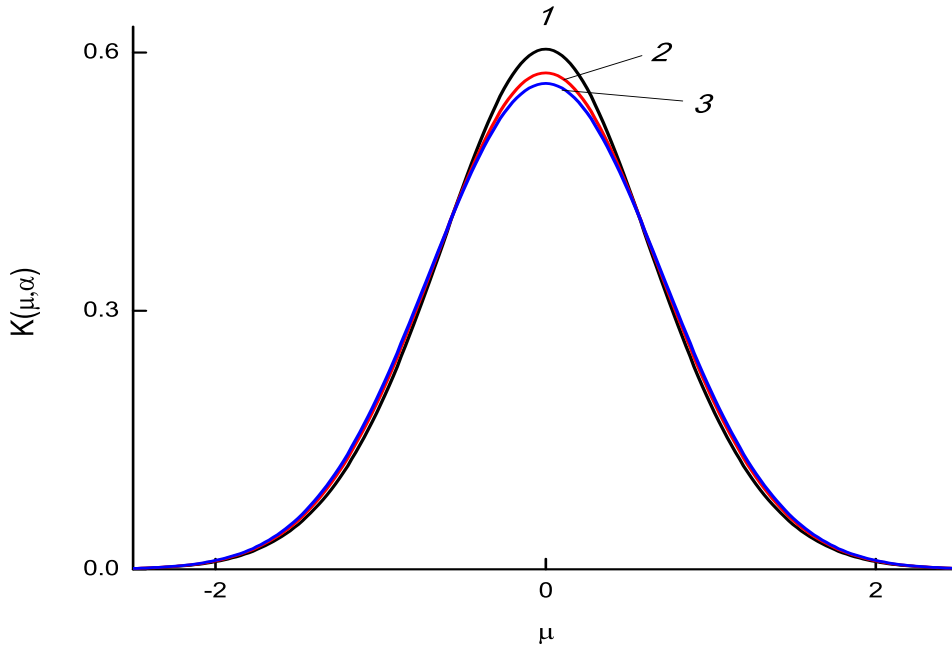


Рис. 3: Поведение ядер кинетического уравнения $K_B(\mu, \alpha)$ для Бозе-газа при различных значениях безразмерного химпотенциала. Кривая 1 отвечает значению $\alpha = -1$, кривая 2 – значению $\alpha = -2$, кривая 3 отвечает абсолютному максвеллиану $f_M(\mu) = \exp(-\mu^2)/\sqrt{\pi}$.

Массовая скорость согласно (2.8) и (2.9) равна

$$U_y(x_1) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} K_B(\mu', \alpha) h(x_1, \mu') d\mu'. \quad (2.10)$$

Таким образом, согласно (2.10) уравнение (2.5) представим в стандартном для теории переноса виде:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x_1} + h(x_1, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} K_B(\mu', \alpha) h(x_1, \mu') d\mu', \quad (2.11)$$

или, в явном виде

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x_1} + h(x_1, \mu) = \frac{1}{2l_0^B(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \ln(1 - \exp(\alpha - \mu'^2)) h(x_1, \mu') d\mu'. \quad (2.12)$$

2.2 Предельный случай уравнения

Рассмотрим предельный случай уравнения (2.12) при $\alpha \rightarrow -\infty$. В этом случае

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} K_B(\mu, \alpha) &= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + \exp(\alpha - \mu^2))}{\int_{-\infty}^{\infty} \ln(1 + \exp(\alpha - u^2)) du} = \\ &= \frac{\exp(-\mu^2)}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2) du} = \frac{\exp(-\mu^2)}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

и мы получаем уравнение

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x} + h(x_1, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2) h(x_1, \mu') d\mu',$$

которое является БГК-уравнением для одноатомных газов с постоянной частотой столкновений молекул.

2.3 Постановка задачи Крамерса

Задание градиента массовой скорости (2.2) означает, что вдали от стенки распределение массовой скорости в полупространстве имеет линейный рост

$$u_y(x) = u_{sl}(\alpha) + g_v x, \quad x \rightarrow +\infty,$$

где $u_{sl}(\alpha)$ – неизвестная скорость скольжения.

Умножая это равенство на $\sqrt{\beta}$ и учитывая связь размерного и безразмерного градиентов $g_v = \nu G_v$, для безразмерной массовой скорости получаем

$$U_y(x_1) = U_{sl}(\alpha) + G_v x_1, \quad x_1 \rightarrow +\infty. \quad (2.13)$$

Зеркально-диффузное отражение Бозе-частиц от поверхности означает, что последние отражаются от стенки, имея бозеевское распределение, т.е.

$$f(x=0, \mathbf{v}) = q f_B(v) + (1-q) f(x=0, -v_x, v_y, v_z), \quad v_x > 0, \quad (2.14)$$

где $0 \leq q \leq 1$, q – коэффициент диффузности, $f_B(v)$ – абсолютный бозеан.

В уравнении (2.14) параметр q (коэффициент диффузности) – часть молекул, рассеивающихся границей диффузно, $1-q$ – часть молекул, рассеивающихся зеркально.

Учитывая, что функцию распределения мы ищем в виде (2.4), из условия (2.14) получаем граничное условие на стенке на функцию $h(x_1, \mu)$:

$$h(0, \mu) = (1-q) h(0, -\mu), \quad \mu > 0. \quad (2.15)$$

Вторым граничным условием является граничное условие "вдали от стенки". Этим условием является соотношение (2.13). Преобразуем это условие на функцию $h(x_1, \mu)$. Условие (2.13) означает, что вдали от стенки массовая скорость переходит в свое асимптотическое распределение

$$U_y^{as}(x_1) = U_{sl}(\alpha) + G_v x_1.$$

Выражение для массовой скорости (2.8) означает, что вдали от стенки функция $h(x_1, \mu)$ переходит в свое асимптотическое распределение

$$h_{as}(x_1, \mu) = 2U_{sl}(\alpha) + 2G_v(x_1 - \mu),$$

называемое распределением Чепмена—Энскога (см., например, [1], [2], [4]).

Таким образом, вторым граничным условием является условие:

$$h(x_1, \mu) = 2U_{sl}(\alpha) + 2G_v(x_1 - \mu), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (2.16)$$

Теперь задача Крамерса при условии полного диффузного отражения Бозе-частиц от стенки сформулирована полностью и состоит в решении уравнения (2.12) с граничными условиями (2.15) и (2.16). При этом требуется определить безразмерную скорость скольжения $U_{sl}(\alpha)$, величина градиента G_v считается заданной.

3 Включение граничных условий в кинетическое уравнение

Продолжим функцию распределения на сопряженное полупространство симметричным образом:

$$f(t, x, \mathbf{v}) = f(t, -x, -v_x, v_y, v_z). \quad (3.1)$$

Продолжение согласно (3.1) на полупространство $x < 0$ позволяет включить граничные условия в уравнения задачи.

Такое продолжение функции распределения на полупространство $x < 0$ позволяет фактически рассматривать две задачи, одна из которых определена в "положительном" полупространстве $x > 0$, вторая – в отрицательном "полупространстве" $x < 0$.

Сформулируем зеркально-диффузные граничные условия для функции распределения соответственно для "положительного" и для "отрицательного" полупространств:

$$f(t, +0, \mathbf{v}) = qf_0(v) + (1 - q)f(t, +0, -v_x, v_y, v_z), \quad v_x > 0, \quad (3.2)$$

$$f(t, -0, \mathbf{v}) = qf_0(v) + (1 - q)f(t, -0, -v_x, v_y, v_z), \quad v_x < 0. \quad (3.3)$$

где q – коэффициент диффузности, $0 \leq q \leq 1$.

В уравнениях (3.2) и (3.3) параметр q (коэффициент диффузности) – часть молекул, рассеивающихся границей диффузно, $1 - q$ – часть молекул, рассеивающихся зеркально, т.е. уходящие от стенки молекулы имеют максвелловское распределение по скоростям.

Далее безразмерную координату x_1 снова будем обозначать через x .

Согласно (2.4) и (3.1) мы имеем:

$$h(x, \mu) = h(-x, -\mu), \quad \mu > 0.$$

На функцию $h(x, \mu)$ в "положительном" и "отрицательном" полупространствах получаем одно и то же уравнение:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x} + h(x, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} K_B(t, \alpha) h(x, t) dt, \quad (3.4)$$

и соответственно следующие граничные условия:

$$h(+0, \mu) = (1 - q)h(+0, -\mu) = (1 - q)h(-0, \mu), \quad \mu > 0,$$

$$h(-0, \mu) = (1 - q)h(-0, -\mu) = (1 - q)h(+0, \mu), \quad \mu < 0.$$

Правая часть уравнения (3.4) есть удвоенная массовая скорость газа:

$$U(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_B(t, \alpha) h(x, t) dt.$$

Представим функцию $h(x, \mu)$ в виде:

$$h(x, \mu) = h_{as}^{\pm}(x, \mu) + h_c(x, \mu), \quad \text{если } \pm x > 0,$$

где асимптотическая часть функции распределения (так называемая чепмен–энскоговская функция распределения)

$$h_{as}^{\pm}(x, \mu) = 2U_{sl}(q, \alpha) \pm 2G_v(x - \mu), \quad \text{если } \pm x > 0, \quad (3.5)$$

также является решением кинетического уравнения (3.4).

Здесь $U_{sl}(q, \alpha)$ – есть искомая скорость изотермического скольжения (безразмерная).

Следовательно, функция $h_c(x, \mu)$ также удовлетворяет уравнению (3.4):

$$\mu \frac{\partial h_c}{\partial x} + h_c(x, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} K_B(t, \alpha) h_c(x, t) dt.$$

Так как вдали от стенки ($x \rightarrow \pm\infty$) функция распределения $h(x, \mu)$ переходит в чепмен—энскоговскую $h_{as}^{\pm}(x, \mu)$, то для функции $h_c(x, \mu)$, отвечающей непрерывному спектру, получаем следующее граничное условие: $h_c(\pm\infty, \mu) = 0$.

Отсюда для массовой скорости газа получаем:

$$U_c(\pm\infty) = 0. \quad (3.6)$$

Отметим, что в равенстве (3.5) знак градиента в "отрицательном" полупространстве меняется на противоположный. Поэтому условие (3.6) выполняется автоматически для функций $h_{as}^{\pm}(x, \mu)$.

Тогда граничные условия переходят в следующие:

$$\begin{aligned} h_c(+0, \mu) &= \\ &= -h_{as}^+(+0, \mu) + (1 - q)h_{as}^+(+0, -\mu) + (1 - q)h_c(+0, -\mu), \quad \mu > 0, \\ h_c(-0, \mu) &= \\ &= -h_{as}^-(-0, \mu) + (1 - q)h_{as}^-(-0, -\mu) + (1 - q)h_c(-0, -\mu), \quad \mu < 0. \end{aligned}$$

Обозначим

$$h_0^{\pm}(\mu) = -2qU_{sl}(q, \alpha) + (2 - q)2G_v|\mu|.$$

И перепишем предыдущие граничные условия в виде:

$$\begin{aligned} h_c(+0, \mu) &= h_0^+(\mu) + (1 - q)h_c(+0, -\mu), \quad \mu > 0, \\ h_c(-0, \mu) &= h_0^-(\mu) + (1 - q)h_c(-0, -\mu), \quad \mu < 0, \end{aligned}$$

где

$$h_0^{\pm}(\mu) = -h_{as}^{\pm}(0, \mu) + (1 - q)h_{as}^{\pm}(0, -\mu) =$$

$$= -2qU_{sl}(q, \alpha) + (2 - q)2G_v|\mu|.$$

Учитывая симметричное продолжение функции распределения, имеем

$$h_c(-0, -\mu) = h_c(+0, +\mu), \quad h_c(+0, -\mu) = h_c(-0, +\mu).$$

Следовательно, граничные условия перепишутся в виде:

$$h_c(+0, \mu) = h_0^+(\mu) + (1 - q)h_c(-0, \mu), \quad \mu > 0, \quad (3.7)$$

$$h_c(-0, \mu) = h_0^-(\mu) + (1 - q)h_c(+0, \mu), \quad \mu < 0. \quad (3.8)$$

Включим граничные условия (3.7) и (3.8) в кинетическое уравнение следующим образом:

$$\mu \frac{\partial h_c}{\partial x} + h_c(x, \mu) = 2U_c(x) + |\mu| \left[h_0^\pm(\mu) - qh_c(\pm 0, \mu) \right] \delta(x), \quad (3.9)$$

где $U_c(x)$ – часть массовой скорости, отвечающая непрерывному спектру,

$$2U_c(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_B(t, \alpha) h_c(x, t) dt. \quad (3.10)$$

Уравнение (3.9) содержит два уравнения. В "положительном" полупространстве, т.е. при $x > 0$ в правой части уравнения (3.9) следует взять верхний знак "плюс", а в "нижнем" полупространстве, т.е. при $x < 0$ в правой части того же уравнения следует взять знак "минус".

В самом деле, пусть, например, $\mu > 0$. Проинтегрируем обе части уравнения (3.9) по x от $-\varepsilon$ до $+\varepsilon$. В результате получаем равенство:

$$h_c(+\varepsilon, \mu) - h_c(-\varepsilon, \mu) = h_0^+(\mu) - qh_c(-\varepsilon, \mu),$$

откуда переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в точности получаем граничное условие (3.7).

На основании определения массовой скорости (3.10) заключаем, что для нее выполняется условие (3.6): $U_c(+\infty) = 0$. Следовательно, в полупространстве $x > 0$ профиль массовой скорости газа вычисляется по формуле:

$$U(x) = U_{as}(x) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} K_B(t, \alpha) h_c(x, t) dt, \quad (3.11)$$

а вдали от стенки имеет следующее линейное распределение:

$$U_{as}(x) = U_{sl}(q, \alpha) + G_v x, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (3.12)$$

4 Кинетическое уравнение во втором и четвертом квадрантах фазового пространства

Решая уравнение (3.9) при $x > 0$, $\mu < 0$, считая заданным массовую скорость $U(x)$, получаем, удовлетворяя граничным условиям (3.8), следующее решение:

$$h_c^+(x, \mu) = -\frac{1}{\mu} \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right) \int_x^{+\infty} \exp\left(+\frac{t}{\mu}\right) 2U_c(t) dt. \quad (4.1)$$

Аналогично при $x < 0$, $\mu > 0$ находим:

$$h_c^-(x, \mu) = -\frac{1}{\mu} \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right) \int_x^{-\infty} \exp\left(+\frac{t}{\mu}\right) 2U_c(t) dt. \quad (4.2)$$

Теперь уравнения (3.9) и (3.10) можно переписать, заменив второй член в квадратной скобке из (3.9) согласно (4.1) и (4.2), в виде:

$$\mu \frac{\partial h_c}{\partial x} + h_c(x, \mu) = 2U_c(x) + |\mu| \left[h_0^\pm(\mu) - q h_c^\pm(0, \mu) \right] \delta(x), \quad (4.3)$$

$$2U_c(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_B(t, \alpha) h_c(x, t) dt. \quad (4.4)$$

В равенствах (4.3) граничные значения $h_c^\pm(0, \mu)$ выражаются через составляющую массовой скорости, отвечающей непрерывному спектру:

$$h_c^\pm(0, \mu) = -\frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} \int_0^{\pm\infty} e^{t/\mu} 2U_c(t) dt = h_c(\pm 0, \mu).$$

Решение уравнений (4.4) и (4.3) ищем в виде интегралов Фурье:

$$2U_c(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} E(k) dk, \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk, \quad (4.5)$$

$$h_c(x, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \Phi(k, \mu) dk. \quad (4.6)$$

При этом функция распределения $h_c^+(x, \mu)$ выражается через спектральную плотность $E(k)$ массовой скорости следующим образом:

$$\begin{aligned} h_c^+(x, \mu) &= -\frac{1}{\mu} \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right) \int_x^{+\infty} \exp\left(+\frac{t}{\mu}\right) dt \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikt} E(k) dk = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx} E(k)}{1 + ik\mu} dk. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$h_c^-(x, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx} E(k)}{1 + ik\mu} dk.$$

Таким образом,

$$h_c^{\pm}(x, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx} E(k)}{1 + ik\mu} dk.$$

Используя четность функции $E(k)$ далее получаем:

$$h_c^{\pm}(0, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E(k)}{1 + ik\mu} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E(k) dk}{1 + k^2\mu^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{E(k) dk}{1 + k^2\mu^2}. \quad (4.7)$$

Теперь с помощью равенства (4.7) уравнение (4.3) можно переписать в виде:

$$\mu \frac{\partial h_c}{\partial x} + h_c(x, \mu) = 2U_c(x) + |\mu| \left[h_0^{\pm}(\mu) - \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{E(k) dk}{1 + k^2\mu^2} \right] \delta(x), \quad (4.3')$$

5 Характеристическая система

Теперь подставим интегралы Фурье (4.6) и (4.5), а также равенство (4.7) в уравнения (4.3) и (4.4). Получаем характеристическую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \Phi(k, \mu)(1 + ik\mu) = \\ = E(k) + |\mu| \left[-2qU_{sl}(q, \alpha) + 2(2 - q)G_v|\mu| - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty \frac{E(k_1)dk_1}{1 + k_1^2\mu^2} \right], \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$E(k) = \int_{-\infty}^\infty K(t, \alpha)\Phi(k, t)dt. \quad (5.2)$$

Из уравнения (5.1) получаем:

$$\begin{aligned} \Phi(k, \mu) = \frac{E(k)}{1 + ik\mu} + \\ + \frac{|\mu|}{1 + ik\mu} \left[-2qU_{sl}(q, \alpha) + 2(2 - q)G_v|\mu| - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty \frac{E(k_1)dk_1}{1 + k_1^2\mu^2} \right], \end{aligned} \quad (5.3)$$

Подставим выражение для функции $\Phi(k, \mu)$, определенное равенством (5.3), в (5.2). Получаем, что:

$$\begin{aligned} E(k)L(k) = -2qU_{sl}(q, \alpha)T_1(k) + 2(2 - q)G_vT_2(k) - \\ - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty E(k_1)dk_1 \int_{-\infty}^\infty \frac{K_B(t, \alpha)|t|dt}{(1 + ikt)(1 + k_1^2t^2)}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь

$$T_n(k) = 2 \int_0^\infty \frac{K_B(t, \alpha)t^n dt}{1 + k^2t^2}, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots,$$

причем для четных n

$$T_n(k) = 2 \int_0^\infty \frac{K_B(t, \alpha)t^n dt}{1 + k^2t^2} = \int_{-\infty}^\infty \frac{K_B(t, \alpha)t^n dt}{1 + k^2t^2}, \quad n = 0, 2, 4, \dots,$$

кроме того,

$$L(k) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_B(t, \alpha) dt}{1 + ikt}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} L(k) &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_B(t, \alpha) dt}{1 + k^2 t^2} = \\ &= 1 - 2 \int_0^{\infty} \frac{K_B(t, \alpha) dt}{1 + k^2 t^2} = 2k^2 \int_0^{\infty} \frac{K_B(t, \alpha) t^2 dt}{1 + k^2 t^2} = k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_B(t, \alpha) t^2 dt}{1 + k^2 t^2}, \end{aligned}$$

или, кратко,

$$L(k) = k^2 T_2(k).$$

Кроме того, внутренний интеграл в (5.4) преобразуем и обозначим следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_B(t, \alpha) |t| dt}{(1 + ikt)(1 + k_1^2 t^2)} = 2 \int_0^{\infty} \frac{K_B(t, \alpha) t dt}{(1 + k^2 t^2)(1 + k_1^2 t^2)} = J(k, k_1).$$

Заметим, что

$$J(k, 0) = T_1(k), \quad J(0, k_1) = T_1(k_1).$$

Перепишем теперь уравнение (5.4) с помощью предыдущего равенства в следующем виде:

$$\begin{aligned} E(k)L(k) &= -2qU_{sl}(q, \alpha)T_1(k) + 2(2 - q)G_v T_2(k) - \\ &\quad - \frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} J(k, k_1) E(k_1) dk_1. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Уравнение (5.5) есть интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

6 Ряд Неймана

Считая градиент массовой скорости в уравнении (5.5) заданным, разложим решения характеристической системы (5.3) и (5.5) в ряд по степеням коэффициента диффузности q :

$$E(k) = G_v 2(2 - q) \left[E_0(k) + q E_1(k) + q^2 E_2(k) + \dots \right], \quad (6.1)$$

$$\Phi(k, \mu) = G_v 2(2 - q) \left[\Phi_0(k, \mu) + q \Phi_1(k, \mu) + q^2 \Phi_2(k, \mu) + \dots \right]. \quad (6.2)$$

Скорость скольжения $U_{sl}(q, \alpha)$ при этом будем искать в виде

$$U_{sl}(q, \alpha) = G_v \frac{2 - q}{q} \left[U_0 + U_1 q + U_2 q^2 + \dots + U_n q^n + \dots \right]. \quad (6.3)$$

Подставим ряды (6.1)–(6.3) в уравнения (5.3) и (5.5). Получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & (1 + ik\mu) [\Phi_0(k, \mu) + \Phi_1(k, \mu)q + \Phi_2(k, \mu)q^2 + \dots] = \\ & = [E_0(k) + E_1(k)q + E_2(k)q^2 + \dots] - (U_0 + U_1 q + U_2 q^2 + \dots)|\mu| + \\ & + \mu^2 - |\mu| \frac{q}{\pi} \int_0^\infty \frac{E_0(k_1) + E_1(k_1)q + E_2(k_1)q^2 + \dots}{1 + k_1^2 \mu^2} dk_1, \\ & [E_0(k) + E_1(k)q + E_2(k)q^2 + \dots] L(k) = -[U_0 + U_1 q + U_2 q^2 + \dots] T_1(k) + T_2(k) - \\ & - \frac{q}{\pi} \int_0^\infty J(k, k_1) [E_0(k_1) + E_1(k_1)q + E_2(k_1)q^2 + \dots] dk_1. \end{aligned}$$

Последние интегральные уравнения распадаются на эквивалентную бесконечную систему уравнений. В нулевом приближении получаем следующую систему уравнений:

$$E_0(k) L(k) = T_2(k) - U_0 T_1(k), \quad (6.4)$$

$$\Phi_0(k, \mu) (1 + ik\mu) = E_0(k) + \mu^2 - U_0 |\mu|, \quad (6.5)$$

В первом приближении:

$$E_1(k) L(k) = -U_1 T_1(k) - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty J(k, k_1) E_0(k_1) dk_1, \quad (6.6)$$

$$\Phi_1(k, \mu)(1 + ik\mu) = E_1(k) - U_1|\mu| - \frac{|\mu|}{\pi} \int_0^\infty \frac{E_0(k_1)dk_1}{1 + k_1^2\mu^2}. \quad (6.7)$$

Во втором приближении:

$$E_2(k)L(k) = -U_2T_1(k) - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty J(k, k_2)E_1(k_2)dk_2, \quad (6.8)$$

$$\Phi_2(k, \mu)(1 + ik\mu) = E_2(k) - U_2|\mu| - \frac{|\mu|}{\pi} \int_0^\infty \frac{E_1(k_2)dk_2}{1 + k_2^2\mu^2}. \quad (6.9)$$

В n -м приближении получаем:

$$E_n(k)L(k) = -U_nT_1(k) - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty J(k, k_n)E_{n-1}(k_n)dk_n, \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} \Phi_n(k, \mu)(1 + ik\mu) = E_n(k) - U_n|\mu| - \\ - \frac{|\mu|}{\pi} \int_0^\infty \frac{E_{n-1}(k_n)dk_n}{1 + k_n^2\mu^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (6.11)$$

6.1 Нулевое приближение

Из формулы (6.4) для нулевого приближения находим:

$$E_0(k) = \frac{T_2(k) - U_0T_1(k)}{L(k)}. \quad (6.12)$$

Нулевое приближение массовой скорости на основании (6.12) равно:

$$\begin{aligned} U_c^{(0)}(x) &= G_v \frac{2-q}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ikx} E_0(k) dk = \\ &= G_v \frac{2-q}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ikx} \frac{-U_0T_1(k) + T_2(k)}{L(k)} dk. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Согласно (6.13) наложим на нулевое приближение массовой скорости требование: $U_c(+\infty) = 0$. Это условие приводит к тому, что подынтегральное выражение из интеграла Фурье (6.13) в точке $k = 0$ конечно. Следовательно, мы должны устранить полюс второго порядка в точке $k = 0$ у функции $E_0(k)$.

Замечая, что

$$T_2(0) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 K_B(t, \alpha) dt = \frac{1}{2l_0^B(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \ln(1 - e^{\alpha-t^2}) dt = \frac{l_2^B(\alpha)}{l_0^B(\alpha)},$$

$$T_1(0) = 2 \int_0^{\infty} t K_B(t, \alpha) dt = \frac{1}{l_0^B(\alpha)} \int_0^{\infty} t \ln(1 - e^{\alpha-t^2}) dt = \frac{l_1^B(\alpha)}{l_0^B(\alpha)},$$

находим нулевое приближение U_0 :

$$U_0 = \frac{T_2(0)}{T_1(0)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \ln(1 - e^{\alpha-t^2}) dt}{2 \int_0^{\infty} t \ln(1 - e^{\alpha-t^2}) dt} = \frac{l_2^B(\alpha)}{l_1^B(\alpha)}.$$

Заметим, что

$$U_0(-\infty) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0.8862, \quad U_0(0) = 0.7227.$$

Найдем числитель выражения (6.12):

$$\begin{aligned} T_2(k) - U_0 T_1(k) &= T_2(k) - \frac{T_2(0)}{T_1(0)} T_1(k) = \\ &= \frac{1}{T_1(0)} \left[T_1(0) T_2(k) - T_2(0) T_1(k) \right]. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$\frac{1}{1 + k^2 t^2} = 1 - \frac{k^2 t^2}{1 + k^2 t^2},$$

получаем

$$T_2(k) = T_2(0) - k^2 T_4(k), \quad T_1(k) = T_1(0) - k^2 T_3(k).$$

Откуда

$$T_1(0) T_2(k) - T_2(0) T_1(k) = k^2 \left[T_2(0) T_3(k) - T_1(0) T_4(k) \right].$$

Следовательно, мы получаем:

$$T_2(k) - U_0 T_1(k) = \frac{k^2}{L(k)T_1(0)} \left[T_2(0)T_3(k) - T_1(0)T_4(k) \right],$$

или, учитывая, что $L(k) = k^2 T_2(k)$, запишем предыдущее равенство короче,

$$E_0(k) = \frac{\varphi_0(k)}{T_2(k)},$$

где

$$\varphi_0(k) = \frac{T_2(0)T_3(k) - T_1(0)T_4(k)}{T_1(0)}.$$

Согласно (6.5) находим:

$$\Phi_0(k, \mu) = \frac{E_0(k) + \mu^2 - U_0|\mu|}{1 + ik\mu},$$

и, следовательно,

$$h_c^{(0)}(x, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[E_0(k) + \mu^2 - U_0|\mu| \right] \frac{e^{ikx} dk}{1 + ik\mu}.$$

6.2 Первое приближение

Перейдем к первому приближению. В первом приближении из уравнения (6.6) находим:

$$E_1(k) = -\frac{1}{L(k)} \left[U_1 T_1(k) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{J(k, k_1)}{T_2(k_1)} \varphi_0(k_1) dk_1 \right]. \quad (6.14)$$

Первая поправка к массовой скорости имеет вид

$$U_c^{(1)}(x) = G_v \frac{2-q}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} E_1(k) dk.$$

Требование $U_c(+\infty) = 0$ приводит к требованию конечности подынтегрального выражения в предыдущем интеграле Фурье. Устраняя полюс второго порядка в точке $k = 0$, находим:

$$U_1 = -\frac{1}{\pi T_1(0)} \int_0^{\infty} J(0, k_1) \frac{\varphi_0(k_1)}{T_2(k_1)} dk_1 =$$

$$= -\frac{1}{\pi T_1(0)} \int_0^\infty \frac{T_1(k_1)}{T_2(k_1)} \varphi_0(k_1) dk_1 = -\frac{1}{\pi T_1(0)} \int_0^\infty T_1(k_1) E_0(k_1) dk_1. \quad (6.15)$$

Нетрудно проверить, что

$$U_1(-\infty) \approx 0.1405, \quad U_1(0) = 0.1775.$$

Преобразуем с помощью (6.15) выражение в квадратной скобке из выражения (6.14):

$$\begin{aligned} & U_1 T_1(k) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty J(k, k_1) \frac{\varphi_0(k_1)}{T_2(k_1)} dk_1 = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty J(k, k_1) \frac{\varphi_0(k_1)}{T_2(k_1)} dk_1 - \frac{T_1(k)}{\pi T_1(0)} \int_0^\infty T_1(k_1) \frac{\varphi_0(k_1)}{T_2(k_1)} dk_1 = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[J(k, k_1) - \frac{T_1(k) T_1(k_1)}{T_1(0)} \right] E_0(k_1) dk_1. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Заметим, что $J(0, k_1) = T_1(k_1)$. Найдем выражение

$$J(k, k_1) - \frac{T_1(k) T_1(k_1)}{T_1(0)}.$$

Рассмотрим разложение на элементарные дроби:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 + k^2 t^2)(1 + k_1^2 t^2)} &= \frac{[(1 + k_1^2 t^2) - k_1^2 t^2][(1 + k^2 t^2) - k^2 t^2]}{(1 + k^2 t^2)(1 + k_1^2 t^2)} = \\ &= 1 - \frac{k_1^2 t^2}{1 + k_1^2 t^2} - \frac{k^2 t^2}{1 + k^2 t^2} + \frac{k^2 k_1^2 t^4}{(1 + k^2 t^2)(1 + k_1^2 t^2)} \end{aligned}$$

С помощью этого разложения преобразуем интеграл

$$J(k, k_1) = 2 \int_0^\infty \frac{K_B(t, \alpha) t dt}{(1 + k^2 t^2)(1 + k_1^2 t^2)}.$$

Получаем следующее представление этого интеграла:

$$J(k, k_1) = T_1(0) - k_1^2 2 \int_0^\infty \frac{K_B(t, \alpha) t^3 dt}{1 + k_1^2 t^2} - k^2 2 \int_0^\infty \frac{K_B(t, \alpha) t^3 dt}{1 + k^2 t^2} +$$

$$+k^2k_1^22\int_0^\infty \frac{K_B(t,\alpha)t^5dt}{(1+k^2t^2)(1+k_1^2t^2)},$$

или

$$J(k, k_1) = T_1(0) - k^2T_3(k) - k_1^2T_3(k_1) + k^2k_1^2J_5(k, k_1),$$

где

$$J_n(k, k_1) = 2\int_0^\infty \frac{K_B(t,\alpha)t^ndt}{(1+k^2t^2)(1+k_1^2t^2)}, \quad n = 3, 5.$$

Теперь ясно, что

$$J(k, k_1) - \frac{T_1(k)T_1(k_1)}{T_1(0)} = k^2k_1^2\left[J_5(k, k_1) - \frac{T_3(k)T_3(k_1)}{T_1(0)}\right].$$

Представим это выражение в виде

$$J(k, k_1) - \frac{T_1(k)T_1(k_1)}{T_1(0)} = k^2S(k, k_1),$$

где

$$S(k, k_1) = k_1^2\left[J_5(k, k_1) - \frac{T_3(k)T_3(k_1)}{T_1(0)}\right].$$

Вернемся к выражению (6.14). С помощью (6.16) теперь получаем:

$$E_1(k_1) = -\frac{1}{\pi T_2(k_1)}\int_0^\infty \frac{S(k_1, k_2)}{T_2(k_2)}\varphi_0(k_2) dk_2, \quad (6.17)$$

или, кратко,

$$E_1(k_1) = \frac{\varphi_1(k_1)}{T_2(k_1)},$$

где

$$\varphi_1(k_1) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{S(k_1, k_2)}{T_2(k_2)}\varphi_0(k_2) dk_2,$$

или

$$\varphi_1(k_1) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty S(k_1, k_2)E_0(k_2) dk_2.$$

Теперь подставляя (6.17) в (6.7) находим первое приближение спектральной плотности функции распределения:

$$\Phi_1(k, \mu) = \frac{1}{1 + ik\mu} \left[E_1(k) - U_1|\mu| - \frac{|\mu|}{\pi} \int_0^\infty \frac{E_0(k_1) dk_1}{1 + k_1^2 \mu^2} \right].$$

6.3 Второе приближение

Перейдем ко второму приближению задачи – уравнения (6.8) и (6.9). Из уравнения (6.8) находим:

$$E_2(k) = -\frac{1}{L(k)} \left[U_2 T_1(k) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty J(k, k_1) E_1(k_1) dk_1 \right]. \quad (6.18)$$

Вторая поправка к массовой скорости имеет вид:

$$U_c^{(2)}(x) = G_v \frac{2-q}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ikx} E_2(k) dk.$$

Условие $U_c(+\infty) = 0$ приводит к требованию ограниченности функции $E_2(k)$ в точке $k = 0$. Устраняя полюс второго порядка в точке $k = 0$ в правой части равенства для $E_2(k)$, находим:

$$\begin{aligned} U_2 &= -\frac{1}{\pi T_1(0)} \int_0^\infty J(0, k_1) E_1(k_1) dk_1 = \\ &= -\frac{1}{\pi T_1(0)} \int_0^\infty T_1(k_1) E_1(k_1) dk_1. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Нетрудно проверить, что

$$U_2(-\infty) \approx -0.0116, \quad U_2(0) = -0.0214.$$

Формулу (6.19) преобразуем к следующему виду:

$$U_2 = \frac{1}{\pi^2 T_1(0)} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{T_1(k_1) S(k_1, k_2)}{T_2(k_1) T_2(k_2)} \varphi_0(k_2) dk_1 dk_2.$$

Преобразуем выражение (6.18) с помощью равенства (6.19). Имеем:

$$E_2(k) = -\frac{1}{L(k)} \int_0^\infty \left[J(k, k_1) - \frac{T_1(k)T_1(k_1)}{T_1(0)} \right] E_1(k_1) dk_1.$$

Выше было показано, что

$$J(k, k_1) - \frac{T_1(k)T_1(k_1)}{T_1(0)} = k^2 S(k, k_1).$$

Следовательно, предыдущее равенство дает:

$$\begin{aligned} E_2(k) &= -\frac{1}{\pi T_2(k)} \int_0^\infty S(k, k_1) E_1(k_1) dk_1 = \\ &= \frac{1}{\pi^2 T_2(k)} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{S(k, k_1) S(k_1, k_2)}{T_2(k_1) T_2(k_2)} \varphi_0(k_2) dk_1 dk_2. \end{aligned}$$

Перепишем это равенство в виде:

$$E_2(k) = \frac{\varphi_2(k)}{T_2(k)},$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_2(k) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty S(k, k_1) E_1(k_1) dk_1 = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{S(k, k_1) S(k_1, k_2)}{T_2(k_1) T_2(k_2)} \varphi_0(k_2) dk_1 dk_2. \end{aligned}$$

Для второго приближения спектральной плотности функции распределения из уравнения (6.9) получаем:

$$\Phi_2(k, \mu) = \frac{1}{1 + ik\mu} \left[E_2(k) - U_2|\mu| - \frac{|\mu|}{\pi} \int_0^\infty \frac{E_1(k_1) dk_1}{1 + k_1^2 \mu^2} \right].$$

6.4 Высшие приближения

В третьем приближении получаем:

$$E_3(k) = -\frac{1}{L(k)} \left[U_3 T_1(k) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} J(k, k_1) E_2(k_1) dk_1 \right].$$

Как и ранее, устраняя полюс второго порядка в точке $k = 0$, получаем:

$$U_3 = -\frac{1}{\pi T_1(0)} \int_0^{\infty} J(0, k_1) E_2(k_1) dk_1 = -\frac{1}{\pi T_1(0)} \int_0^{\infty} T_1(k_1) E_2(k_1) dk_1,$$

или

$$U_3 = -\frac{1}{\pi T_1(0)} \int_0^{\infty} \frac{T_1(k_1)}{T_2(k_1)} \varphi_2(k_1) dk_1.$$

Заметим, что

$$U_3(-\infty) = 0.0008, \quad U_3(0) = 0.0018.$$

Кроме того, в третьем приближении мы получаем:

$$\begin{aligned} E_3(k) &= -\frac{1}{\pi L(k)} \int_0^{\infty} \left[J(k, k_1) - \frac{T_1(k) T_1(k_1)}{T_1(0)} \right] E_2(k_1) dk_1, = \\ &= -\frac{1}{\pi T_2(k)} \int_0^{\infty} S(k, k_1) E_2(k_1) dk_1, \end{aligned}$$

или

$$E_3(k) = \frac{\varphi_3(k)}{T_2(k)},$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_3(k) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(k, k_1) E_2(k_1) dk_1 = \\ &= -\frac{1}{\pi^3} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{S(k, k_1) S(k_1, k_2) S(k_2, k_3)}{T_2(k_1) T_2(k_2) T_2(k_3)} \varphi_0(k_3) dk_1 dk_2 dk_3, \end{aligned}$$

и

$$U_3 = -\frac{1}{\pi^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{T_1(k_1)S(k_1, k_2)S(k_2, k_3)}{T_1(0)T_2(k_1)T_2(k_2)T_3(k_3)} \varphi_0(k_3) dk_1 dk_2 dk_3.$$

Проводя аналогичные рассуждения, для n -го приближения согласно (4.10) и (4.11) получаем:

$$U_n = -\frac{1}{\pi T_1(0)} \int_0^\infty T_1(k) E_{n-1}(k) dk, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$E_n(k) = -\frac{1}{\pi T_2(k)} \int_0^\infty S(k, k_1) E_{n-1}(k_1) dk_1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

или

$$E_n(k) = \frac{\varphi_n(k)}{T_2(k)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$\varphi_n(k) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty S(k, k_1) E_{n-1}(k_1) dk_1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\Phi_n(k, \mu) = \frac{1}{1 + ik\mu} \left[E_n(k) - U_n |\mu| - \frac{|\mu|}{\pi} \int_0^\infty \frac{E_{n-1}(k_1) dk_1}{1 + k_1^2 \mu^2} \right].$$

Выпишем n -ые приближения V_n , $E_n(k)$ и $\varphi_n(k)$, выраженные через нулевое приближение спектральной плотности массовой скорости $E_0(k) = \varphi_0(k)/T_2(k)$. Имеем:

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{(-1)^n}{\pi^n} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{T_1(k_1)S(k_1, k_2) \dots S(k_{n-1}, k_n)}{T_1(0)T_2(k_1) \dots T_2(k_n)} \times \\ &\quad \times \varphi_0(k_n) dk_1 \dots dk_n, \\ E_n(k) &= \frac{(-1)^n}{\pi^n T_2(k)} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{S(k, k_1)S(k_1, k_2) \dots S(k_{n-1}, k_n)}{T_2(k_1) \dots T_2(k_n)} \times \\ &\quad \times \varphi_0(k_n) dk_1 \dots dk_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ \varphi_n(k) &= \frac{(-1)^n}{\pi^n} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{S(k, k_1)S(k_1, k_2) \dots S(k_{n-1}, k_n)}{T_2(k_1) \dots T_2(k_n)} \times \end{aligned}$$

$$\times \varphi_0(k_n) dk_1 \cdots dk_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

7 Сравнение с точным решением. Скорость скольжения

Сравним нулевое, первое и второе приближения при $q = 1$ с точным решением. Ограничимся случаем квантовых Бозе–газов, близких к классическим (т.е. при $\alpha \rightarrow -\infty$), и случаем диффузного отражения молекул газа от поверхности.

Точное значение скорости скольжения в случае диффузного рассеяния для квантовых Бозе–газов с постоянной частотой столкновений таково:

$$U_{sl}(\alpha, q = 1) = V_1(\alpha)G_v.$$

Здесь

$$V_1(\alpha) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \zeta(\tau, \alpha) d\tau,$$

где

$$\begin{aligned} \zeta(\tau, \alpha) &= \theta(\tau, \alpha) - \pi, \\ \theta(\tau, \alpha) &= \arg \lambda^+(\mu, \alpha) = \operatorname{arccctg} \frac{\lambda(\tau, \alpha)}{\pi \tau K(\tau, \alpha)}, \end{aligned}$$

$$\lambda(z, \alpha) = 1 + z \int_{-\infty}^\infty \frac{K(t, \alpha) dt}{t - z},$$

или, в явном виде,

$$\theta(\tau, \alpha) = \operatorname{arccctg} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{x \ln(1 - e^{\alpha - x^2})}{\tau \ln(1 - e^{\alpha - \tau^2})} \frac{dx}{x - \tau} \right].$$

Следовательно, точное значение безразмерной скорости скольжения в случае диффузного рассеяния для квантовых Бозе–газов, близким к классическим газам (т.е. $\alpha \rightarrow -\infty$) таково:

$$U_{sl}(\alpha = -\infty, q = 1) = 1.0162G_v.$$

Безразмерная скорость скольжения во втором приближении равна:

$$U_{sl}^{(2)}(\alpha, q = 1) = G_v \frac{2 - q}{q} [U_0(\alpha) + U_1(\alpha)q + U_2(\alpha)q^2].$$

Составим относительную ошибку приближения

$$O_n(\alpha) = \frac{V_1(\alpha) - U_{sl}^{(n)}(\alpha, q = 1)}{V_1(\alpha)}.$$

где

$$U_{sl}^{(n)}(\alpha, q) = \sum_{k=0}^{k=n} U_k(\alpha)q^k.$$

Результаты численных расчетов приведем в виде таблиц. В таблицах 1–3 приведем значения коэффициентов $U_0(\alpha)$, $U_1(\alpha)$, $U_2(\alpha)$ при различных значениях безразмерного химического потенциала α и значения соответствующей относительной ошибки нулевого, первого и второго приближений безразмерной скорости скольжения.

Таблица 1.

Химпотенциал α	Коэффициент $U_0(\alpha)$	Относительная ошибка в нулевом приближении, %
0	0.7227	18.01
-1	0.8580	13.33
-2	0.8769	12.96
-3	0.8829	12.85
-4	0.8850	12.81
-5	0.8858	12.80
-6	0.8861	12.79
-7	0.8862	12.79
-8	0.8862	12.79

Таблица 2.

Химпотенциал α	Коэффициент $U_0(\alpha)$	Относительная ошибка в первом приближении, %
0	0.1775	-2.12
-1	0.1431	-1.12
-2	0.1413	-1.06
-3	0.1408	-1.05
-4	0.1406	-1.04
-5	0.1406	-1.04
-6	0.1405	-1.04
-7	0.1405	-1.04
-8	0.1405	-1.04

Таблица 3.

Химпотенциал α	Коэффициент $U_0(\alpha)$	Относительная ошибка во втором приближении, %
0	-0.0214	0.30
-1	-0.0121	0.11
-2	-0.0117	0.10
-3	-0.0116	0.10
-4	-0.0116	0.10
-5	-0.0116	0.10
-6	-0.0116	0.10
-7	-0.0116	0.10
-8	-0.0116	0.10

Приведенное сравнение последовательных приближений с точным результатом свидетельствует о высокой эффективности предлагаемого метода.

8 Профиль скорости газа в полупространстве и ее значение у стенки

Массовую скорость, отвечающую непрерывному спектру, разложим по степеням коэффициента диффузности:

$$U_c(x) = U_c^{(0)}(x) + qU_c^{(1)}(x) + q^2U_c^{(2)}(x) + \dots \quad (8.1)$$

Тогда профиль массовой скорости в полупространстве можно строить по формуле:

$$U(x) = U_{sl}(q, \alpha) + G_v x + U_c(x), \quad (8.2)$$

где $U_c(x)$ определяется предыдущим равенством (8.1).

Коэффициенты ряда (8.1) вычислим согласно выведенным выше формулам:

$$U_c^{(n)}(x) = G_v \frac{2-q}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} E_n(k) dk, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Согласно (8.2) вычислим скорость газа непосредственно у стенки:

$$U(0) = U_{sl}(q, \alpha) + U_c^{(0)}(0) + qU_c^{(1)}(0) + q^2U_c^{(2)}(0) + \dots \quad (8.3)$$

В случае чисто диффузного отражения молекул от стенки ($q = 1$) согласно (8.3) мы имеем

$$U(0) = U_{sl}(1, \alpha) + U_c^{(0)}(0) + U_c^{(1)}(0) + U_c^{(2)}(0) + \dots$$

Отсюда в нулевом приближении получаем:

$$U^{(0)} = U_{sl}(1, \alpha) + U_c^{(0)}(0).$$

Отсюда видно, что

$$U^{(0)} \Big|_{\alpha=-\infty} = U_{sl}(1, -\infty) + U_c^{(0)}(0) \Big|_{\alpha=-\infty} = 0.6747G_v.$$

В первом приближении получаем:

$$U^{(1)}(0) = U_{sl}(1, \alpha) + U_c^{(0)}(0) + U_c^{(1)}(0).$$

Отсюда видно, что

$$\begin{aligned} U^{(1)}(0) \Big|_{\alpha=-\infty} &= U_{sl}(1, -\infty) + U_c^{(0)}(0) \Big|_{\alpha=-\infty} + \\ &+ U_c^{(1)}(0) \Big|_{\alpha=-\infty} = 0.7103G_v. \end{aligned}$$

Во втором приближении получаем:

$$U^{(2)}(0) = U_{sl}(1, \alpha) + U_c^{(0)}(0) + U_c^{(1)}(0) + U_c^{(2)}(0).$$

Отсюда видно, что

$$\begin{aligned} U^{(2)}(0) \Big|_{\alpha=-\infty} &= U_{sl}(1, -\infty) + U_c^{(0)}(0) \Big|_{\alpha=-\infty} + \\ &+ U_c^{(1)}(0) \Big|_{\alpha=-\infty} + U_c^{(2)}(0) \Big|_{\alpha=-\infty} = 0.7068G_v. \end{aligned}$$

Сравним эти результаты с точным значение скорости у стенки [43]:

$$U(0, \alpha) = \sqrt{\frac{l_2^B(\alpha)}{l_0^B(\alpha)}} G_v.$$

Из этой формулы вытекает, что

$$U(0) \Big|_{\alpha=-\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}} G_v = 0.7071G_v.$$

Введем относительную ошибку

$$O_n = \frac{U(0) - U^{(n)}(0)}{U(0)} \cdot 100\%, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В нулевом приближении относительная ошибка равна 4.6%, в первом приближении равна -0.45% , во втором приближении равна: 0.044% .

9 Приведение формул к размерному виду

Формулу (6.3) для безразмерной скорости скольжения приведем к размерному виду. Для этого понадобится коэффициент вязкости квантового Бозе-газа.

По определению коэффициент кинематической вязкости равен:

$$\eta = -\frac{P_{xy}}{\left(\frac{du_y}{dx}\right)_\infty},$$

где $u_y(x)$ – размерная массовая скорость, откуда

$$\eta = -\frac{m}{g_v} \int f v_x v_y d\Omega, \quad (9.1)$$

где g_v – размерный градиент массовой скорости. Учитывая, что $x_1 = \nu\sqrt{\beta}x$, где x – размерная координата, имеем:

$$g_v = \left(\frac{du_y(x)}{dx}\right)_\infty = \frac{\nu d(\sqrt{\beta}u_y(x))}{d(\nu\sqrt{\beta}x)} = \nu \frac{dU_y(x_1)}{dx_1} = \nu G_v.$$

Здесь G_v – безразмерный градиент, U_y – безразмерная массовая скорость в направлении оси y .

Перейдем в (9.1) к интегрированию по безразмерным компонентам скорости:

$$\begin{aligned} \eta &= -\frac{m^4(2s+1)}{\nu G_v(2\pi\hbar)^3(\sqrt{\beta})^5} \int f C_x C_y d^3C = \\ &= -\frac{m^4(2s+1)}{\nu G_v(2\pi\hbar)^3(\sqrt{\beta})^5} \int C_x C_y^2 g_B(C) h(x, C_x) d^3C. \end{aligned}$$

Подставляя вместо $h(x, C_x)$ асимптотическую функцию $h_{as}(x, C_x)$, находим, что

$$\eta = \frac{2(2s+1)m^4}{\nu(2\pi\hbar)^3(\sqrt{\beta})^5} \int C_x^2 C_y^2 g_B(C) d^3C.$$

Вычисляя интеграл в этом выражении, находим коэффициент вязкости:

$$\eta = -\frac{2(2s+1)m^4\pi l_2^B(\alpha)}{\nu(2\pi\hbar)^3(\sqrt{\beta})^5},$$

где

$$l_2^B(\alpha) = \int_0^\infty x^2 \ln(1 - \exp(\alpha - x^2)) dx.$$

Выразим коэффициент вязкости через числовую плотность. Нетрудно видеть, что

$$N = \int f d\Omega = -\frac{2\pi(2s+1)m^3 l_0^B(\alpha)}{(2\pi\hbar)^3(\sqrt{\beta})^3},$$

$$l_0^B(\alpha) = \int_0^\infty \ln(1 - \exp(\alpha - x^2)) dx.$$

Следовательно, коэффициент вязкости можно представить в виде:

$$\eta = \frac{N m l_2(\alpha)}{\nu \beta l_0^B(\alpha)} = \frac{\rho}{\nu \beta} \cdot \frac{l_2^B(\alpha)}{l_0^B(\alpha)}. \quad (9.3)$$

Выражение для размерной скорости с учетом равенства (6.3), в котором все коэффициенты ряда найдены, перепишем в виде:

$$\sqrt{\beta} u_{sl}(\alpha, q) = C(\alpha, q) \frac{g_v}{\nu},$$

откуда размерная скорость скольжения равна:

$$u_{sl}(\alpha, q) = \frac{C(\alpha, q)}{\nu \sqrt{\beta} l} l g_v. \quad (9.4)$$

Здесь

$$C(q, \alpha) = \frac{2-q}{q} [U_0 + U_1 q + U_2 q^2 \dots]. \quad (9.5)$$

Длину свободного пробега l в (9.4) выразим через вязкость η согласно Черчиньяни [4]–[8]: $l = \eta \rho^{-1} \sqrt{\pi \beta}$. Подставляя выражение (9.5) в (9.4), получаем искомую размерную скорость скольжения:

$$u_{sl}(\alpha, q) = K_v^B(\alpha, q) l g_v,$$

где

$$K_v^B(\alpha, q) = \frac{C(\alpha, q) l_0^B(\alpha)}{\sqrt{\pi} l_2^F(\alpha)}$$

есть коэффициент изотермического скольжения.

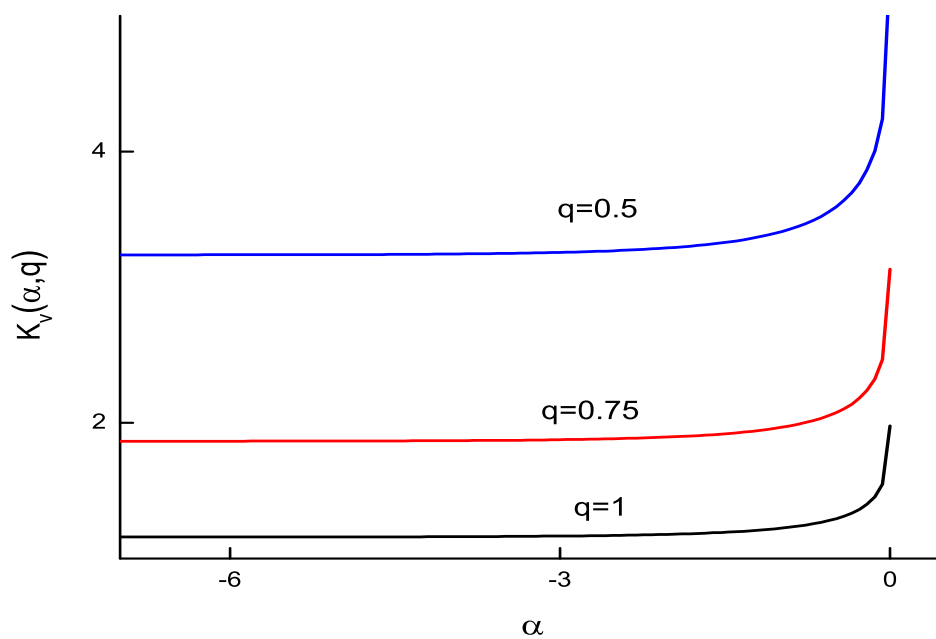


Рис. 4: Зависимость коэффициента изотермического скольжения от коэффициента диффузии.

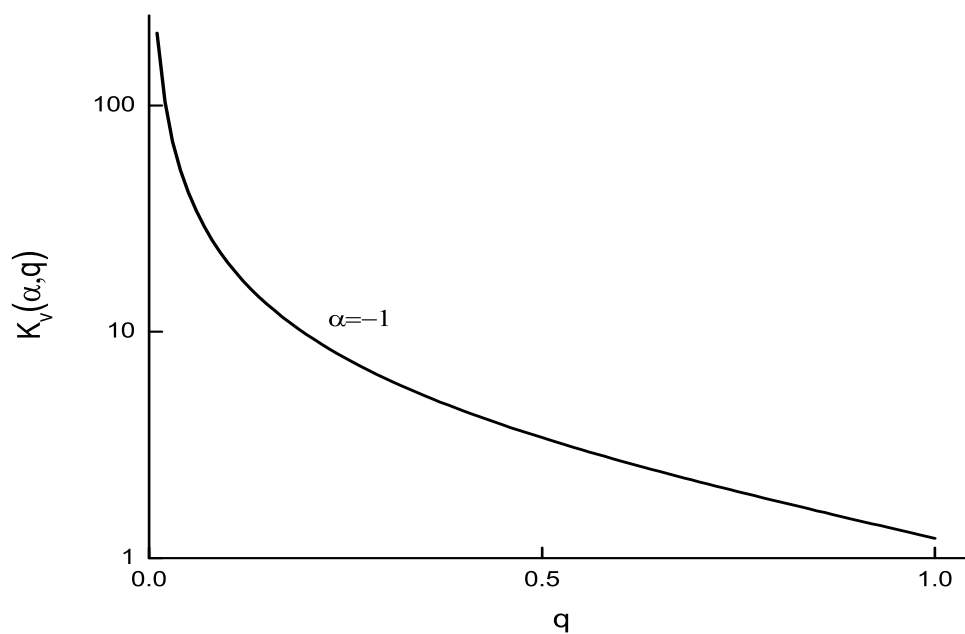


Рис. 5: Зависимость коэффициента изотермического скольжения от коэффициента диффузии.

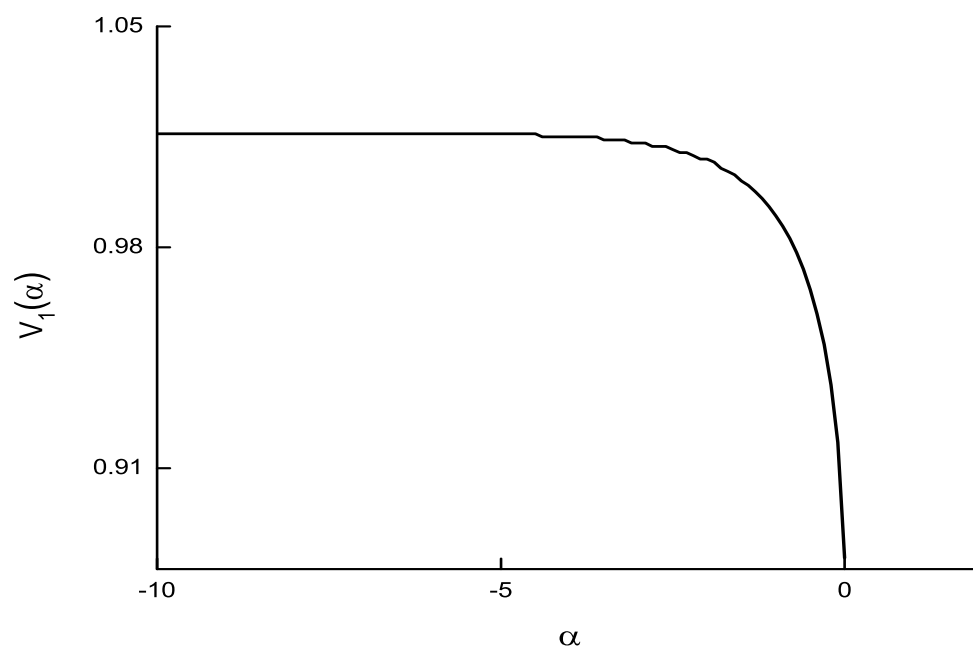


Рис. 6: Зависимость коэффициента $V_1(\alpha)$ от приведенного химического потенциала.

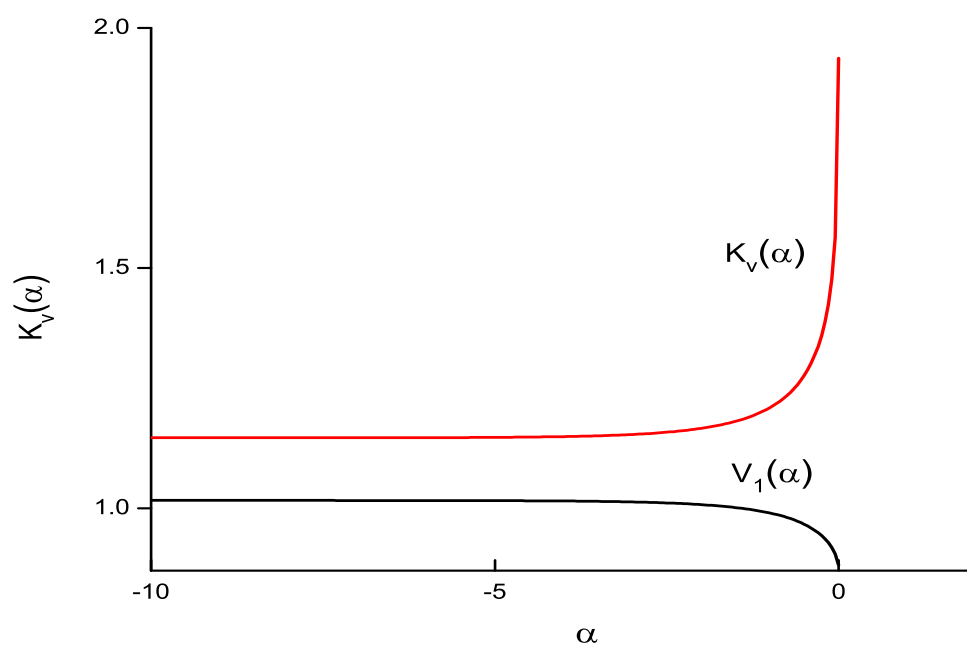


Рис. 7: Зависимость коэффициента изотермического скольжения и коэффициента $V_1(\alpha)$ от приведенного химического потенциала.

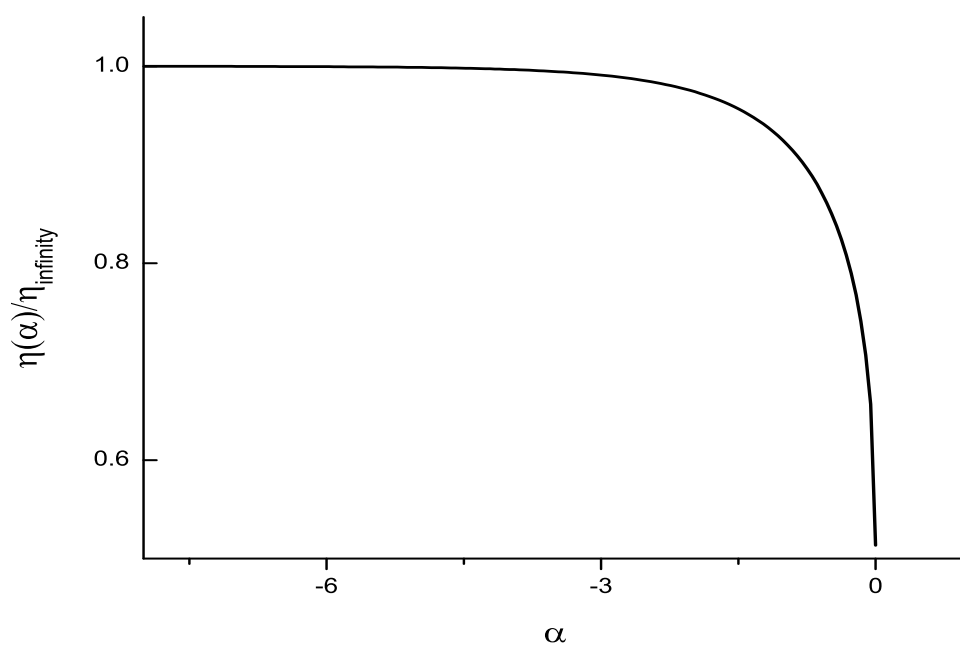


Рис. 8: Зависимость относительного коэффициента вязкости $\frac{\eta(\alpha)}{\eta(-\infty)}$ от приведенного химического потенциала.

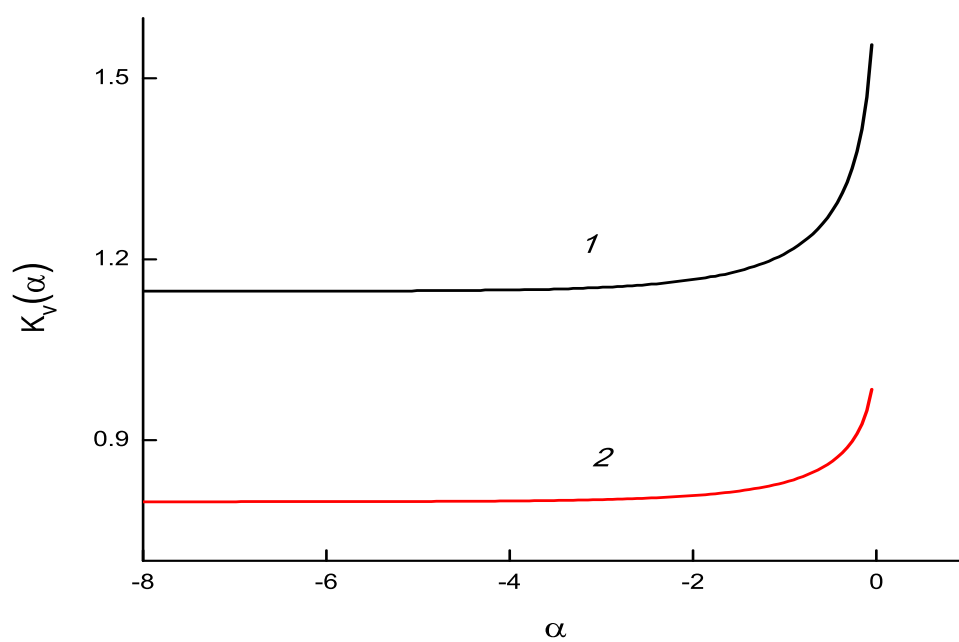


Рис. 9: Зависимость коэффициента изотермического скольжения $K_v(\alpha)$ (кривая 1) и коэффициента скорости Бозе-газа $K_v(0, \alpha)$ непосредственно у стенки (кривая 2) от приведенного химического потенциала.

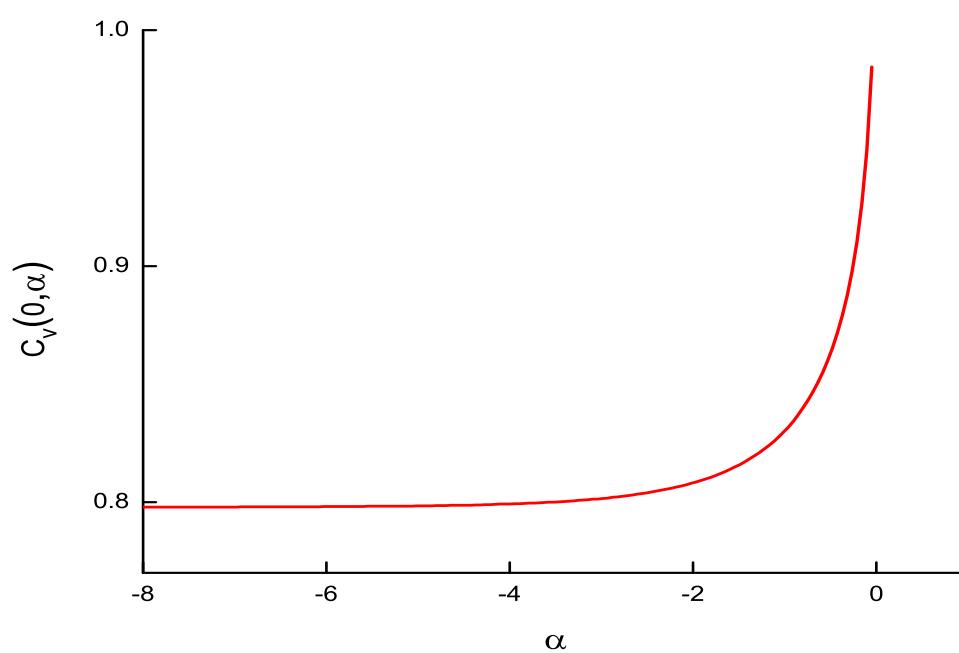


Рис. 10: Зависимость коэффициента скорости $C(0, \alpha)$ Бозе-газа непосредственно у стенки от приведенного химического потенциала.

10 Заключение

В настоящей работе с помощью развитого недавно [66] нового метода решена полупространственная граничная задача кинетической теории — задача Крамерса об изотермическом скольжении квантового Бозе-газа с постоянной частотой столкновений молекул и с зеркально-диффузными граничными условиями. В основе метода лежит идея продолжить функцию распределения в сопряженное полупространство $x < 0$ и включить в кинетическое уравнение граничное условие в виде члена типа источника на функцию распределения, отвечающую непрерывному спектру. С помощью преобразования Фурье кинетическое уравнение сводим к характеристическому интегральному уравнению Фредгольма второго рода, которое решаем методом последовательных приближений. Для этого разлагаем в ряды по степеням коэффициента диффузности скорость скольжения газа, его функцию распределения и массовую скорость, отвечающие непрерывному спектру. Подставляя эти разложения в характеристическое уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях коэффициента диффузности, получаем счетную систему зацепленных уравнений, из которых находим все коэффициенты искомых разложений.

Мы находим так называемую скорость скольжения газа вдоль поверхности, функцию распределения и распределение массовой скорости в полупространстве. Скорость скольжения — это фиктивная скорость газа, которая получается, если профиль асимптотического распределения массовой скорости, вычисленную вдали от стенки на основе асимптотического распределения Чепмена—Энскога, пролонгировать до границы полупространства.

Предлагаемый метод обладает высокой эффективностью. Так, сравнение с точным решением показывает, что в третьем приближении ошибка не превосходит 0.1%.

Изложенный в работе метод был успешно применен [57]–[65] в решении ряда таких сложных задач кинетической теории, которые не допускают аналитического решения.

Список литературы

- [1] *Ferziger J. H. and Kaper H. G.* Mathematical Theory of Transport Processes in Gases. – North-Holland Publishing Company. 1972.
- [2] *Cercignani C.* Mathematical Methods in Kinetic Theory. – Plenum Press. New York. 1969.
- [3] *Case K. M.* Elementary solutions of the transport equations and their applications//Ann. Phys. V.9.№1. 1960. P. 1–23.
- [4] *Cercignani C.* Elementary solutions of the linearized gas-dynamics Boltzmann equation and their applications to the slip-flow problem//Ann. Phys. (USA) 1962. V. 20. No. 2. P. 219–233.
- [5] *Cercignani C.* The method of elementary solutions for kinetic models with velocity-dependent collision frequency//Ann. Phys. 1966. V. 40. P. 469–481.
- [6] *Cercignani C., Foresti P., Sernagiotto F.* Dependence of the slip coefficient on the form of the collision frequency.– Part 2// Nuovo Cimento. 1968. V. LV11. B. No.2. P. 297–306.
- [7] *Cercignani C.* The Kramers problem for a not completely diffusing wall//J. Math. Phys. Appl. 1965. V.10. P. 568–586.
- [8] *Cercignani C., Lampis M.* Kinetic model for gas-surface interaction//Transport Theory and Statist. Physics. 1971. V.1. P. 101–109.
- [9] *Kriese J.T., Chang T.S., Siewert C.E.* Elementary solutions of coupled model equations in the kinetic theory of gases// Intern. J. Eng. Sci. 1974. V. 12. No. 6. 441–470.
- [10] *Cercignani C.* Analytic solution of the temperature jump problem for the BGK model// Transport Theory and Statist. Physics. V. 6. No. 1. 1977. P. 29–56.
- [11] *Aoki K., Cercignani C.* A technique for time – dependent boundary value problems in the kinetic theory of gases. Part I. Basic analysis// J. Appl. Math. Phys. V. 35. No. 2. 1984. P. 127 – 143; Part II. Application to sound propagation. – J. Appl. Math. Phys. V. 35. No. 3, 1984. P. 345 – 362.
- [12] *Latyshev A.V.* Applying the Case method to solving of linear kinetic BGK equation in problem on temperature jump// Appl. Math. and Mech. 1990. V. 54(4). P. 581 – 586.
- [13] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A., Dolgosheina E.B.* Exact solutions of model BGK equation in temperature jump and weak evaporation problems//Fluid Dynamics. V. 27. No. 1. 1992.
- [14] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* An analytical solution of the problem of the temperature jumps and vapour density over a surface when there is a temperature gradient// J. Appl. Maths Mechs. 1994. V. 58. No. 2, p.p. 259–265.

- [15] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Analytic solution to the problem of the temperature jump in a gas with rotational degrees of freedom// *Teor. Math. Phys.* 1993. V. 95, No. 3, June, p.p. 758–765.
- [16] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* The temperature jump and slow evaporation in molecular gases// *J. of experimental and theoretical physics.* 1998, September. V. 87. No. 3. P. 518–526.
- [17] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Constructing a model transport equation for a massless Bose gas and its analytic solution// *Theor. and Mathem. Physics*, Vol. 111, No. 3, 1997. P. 762 – 770.
- [18] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Analytical Solution to the Problem of a Temperature Jump in a Metal// *Technical Physics.* 2003. V. 48. No. 7, pp. 837 – 845.
- [19] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Smolukhovski problem for electrons in a metal// *Theor. and Mathem. Phys.* 2005. V. 142 (1). P. 79–95.
- [20] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Smoluchowski's problem for molecular gases taking the accommodation coefficients of the translational and rotational energy of the molecules into account// *J. Appl. Maths Mehcs*, 2002. Vol. 66, No. 5, pp. 787 – 795.
- [21] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Analytical calculation of the parameters of a molecular gas on a surface in the Smoluchowski problem// *J. of Applied Mechanics and Technical Physics.* 2001. Vol. 42. No. 3, pp. 460 – 468.
- [22] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Analytical solution of one-dimensional problem about moderate strong evaporation (condensation) in half-space//*J. Appl. Mech. and Tech. Phys.* 1993. T. 34. No. 1. C. 102–106.
- [23] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Analytic solution of the strong evaporation (condensation) problem// *Fluid. Mech.* 1992, November – December, No. 6, p.p. 861–871.
- [24] *Arthur M. D., Cercignani C.* Non-existence of a steady rarefied supersonic flow in a half-space// *J. Appl. Math. Phys.* – 1980. – V. 31, №5, 634 – 645.
- [25] *Cassell J. S. and Williams M. M. R.* An exact solution of the temperature slip problem in rarefied gases// *Transport Theory and Statistical Physics*, 2(1), 81–90 (1972).
- [26] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Boundary value problems for a model Boltzmann equation with frequency proportional to the molecule velocity// *Fluid Dynamics.* 1996. V. 31(3), p.p. 454–466.
- [27] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* The theory and accurate solutions of problems of the slip of a binary gas along a plane surface// *Comput. Maths. Math. Phys.* 1991. V. 31 (8), p.p. 58–65.
- [28] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Analytical solution of vector model kinetic equations with constant kernel and their applications// *Teor. Math. Phys.* 1993. V. 97. No. 2, p.p. 1299–1311.
- [29] *Latyshev A.V., Timchenko O.V.* Theory and accurate solutions of the problem of the isothermal slip of a medium-density binary gas// *Comput. Maths. Math. Phys.* 1995. V. 35 (4), p.p. 459–469.

- [30] *Kostikov A.A., Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Analytical Solution of the Problem of Concentration Jump during Evaporation of a Binary Mixture// Technical Physics Letters. 2004. Vol. 30, No. 12, pp. 1023 – 1026.
- [31] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* The Kramers problem for the ellipsoidal–statistical Boltzmann equation with frequency proportional to the velocity of molecules// Comput. Maths and Math. Phys. 1997. Vol. 37(4), p.p. 481 – 491.
- [32] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Analytic Solution of Boundary Value Problems for the Shakhov Equation with the Collision Frequency Proportional to the Molecule Velocity// Fluids Dynamics. 2003. V. 38. №4, pp. 632–645.
- [33] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Analytical solutions of boundary value problems for ellipsoidal statistical equations// J. Appl. Math. and Tech. Phys. 2004. V. 45. No. 5. Pp. 622–633.
- [34] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Moment Boundary Condition in Rarefied Gas Slip–Flow Problems// Fluid Dynamics. 2004. V. 39. No. 2, pp. 339–353.
- [35] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* A Method for Solving Boundary Value Problems for Kinetic Equations// Comput. Maths and Math. Physics. Vol. 44. No. 6. 2004, pp. 1051–1061.
- [36] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* The Method of Singular Equations in Boundary Value Problems in Kinetic Theory// Theor. and Mathem. Physics. 2005. 143(3). P. 855–870.
- [37] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Analytic solution of boundary – value problems for nonstationary model kinetic equations// Theor. Math. Phys. 1992. V. 92. No. 1, p.p. 782–790.
- [38] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Nonstationary boundary problem for model kinetic equations at critical parameters// Teor. and Math. Phys. 1998. V. 116. No. 2. P. 978 – 989. Coauthor: A. A. Yushkanov.
- [39] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Application of the Case method in the analytical solution of a generalized problem of skin effect in a metal// Comput. Maths and Mathem. Physics. 1999. V. 39. No. 6. P. 951 – 967. Coauthor: A.A. Yushkanov.
- [40] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Analytical Description of the Skin Effect in a Metal by Using the Two–Parameter Kinetic Equations// Comput. Maths and Math. Physics. Vol. 44. No. 10. 2004, pp. 1773–1783.
- [41] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Skin – effect at a Finite Temperature with a Diffusive Condition on the Boundary of the Half – Space of the Conducting Medium// Comp. Maths and Math. Phys. 2006. V. 46. No. 1, 141–153.
- [42] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Skin Effect in a Gaseous Plasma with a Collision Frequency Proportional to the Electron Velocity// Plasma Physics Report. 2006. Vol. 32. No. 11, pp. 943 – 948.
- [43] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Boundary Problems for a Quantum Gas// Theoretical and Mathematical Physics. 2001. V. 129, no. 3, pp. 1717–1726.

- [44] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Kinetic equations for quantum Fermi gases and the analytic solution of boundary value problems// Theoretical and Mathematical Physics. 2003. V. 134 (2). 272–285.
- [45] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Electron Plasma in a Metal Half-Space in an Alternating Electric Field// Comp. Math. and Math. Phys. 2001. Vol. 41. No. 8. Pp. 1169–1181.
- [46] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Analytic solution to the problem of the behavior of a collisional plasma in a half-space in an external alternating electric field// Teor. Math. Phys. 1995. V. 103. No. 2, May, p.p. 573–582.
- [47] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Thermoelectric Phenomena at Grain Boundaries// Technical Physics. Vol. 49. No. 11. 2004, pp. 1391–1397.
- [48] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Degenerate plasma in a half – space under an external electric field// Theor. and Mathem. Physics. 2006. 147(3), 854 – 867.
- [49] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Degenerate Plasma in a Half – Space under an External Alternating Electric Field Near Resonance// Physics of Solid State. 2006. Vol. 48. No. 12, pp. 2223 – 2239.
- [50] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Nondegenerate Plasma with a Diffusive Boundary Condition in a High – Frequency Electric Field Near Resonance// Comp. Maths and Math. Physics. 2007. Vol. 47. No. 1, pp. 118 – 125.
- [51] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Reflection of plasma waves from a plane boundary// Theor. and Mathem. Physics. V. 150 (3), 425 – 435 (2007).
- [52] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Reflection of a Plasma Wave from the Flat Boundary of a Degenerate Plasma// Technical Physics. 2007. Vol. 52. No. 3, pp. 306 – 312.
- [53] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Behavior of a plasma with the collision rate proportional to the electron velocity in an external electric field// Theor. and Math. Physics, 153 (3), pp. 1697 – 1708 (2007).
- [54] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Response of the Electron Plasma in a Thin Metal Slab to a Low-Frequency External Electric Field//Russian Microelectronics, 2008, Vol. 37, No. 3, pp. 157–165.
- [55] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Plasma in a Metal Layer Exposed to an RF Electric Field// Technical Physics 2008. Vol. 53, No. 5, pp. 562–570.
- [56] *Alabina Y.F., Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Analytical solution of the skin effect problem with the displacement current in Maxwell plasma by the source method// J. Mathem. Phys. 2009. Vol. 50. No. 4. P. 3516-3524.
- [57] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Smolukhowski problem for degenerate Bose gases// Theor. Mathem. Phys. Springer New York. Vol. 155, No. 3, June, 2008, pp. 936 – 948.
- [58] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Solution of the Skin Effect Problem with Arbitrary Coefficient of Specular Reflection// Comp. Mathem. and Mathem. Physics. 2009. Vol. 49. No. 1, pp. 131 – 145.

- [59] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Structure of the Electric Field in the Skin – Effect Problem// *Physics of Solid State*, 2009, Vol. 51, No. 4, pp. 662 – 669. ©Pleiades Publishing, Ltd., 2009.
- [60] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Smoluchowski problem for metals with mirror–diffusive boundary conditions// *Theor. and Mathem. Physics*, **161** (1): 1403–1414 (2009).
- [61] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Isothermal slip of a Fermi gas with specular–diffuse reflection from the boundary// *Russian Physics Journal: Volume 52, Issue 12* (2009), Page 1251.
- [62] *Gritsienko N.V., Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Plasma Waves Reflection from a Boundary with Specular Accomodative Conditions// *Comp. Maths. and Math. Phys.* 2010, Vol. 50, No. 8, 1433–1446.
- [63] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Skin effect with arbitrary specularity in Maxwellian Plasma//*J. of Math. Phys.* 2010. V. 51, P. 113505-1–113505-10, pp. 10.
- [64] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Temperature jump in degenerate quantum gases in the presence of a Bose–Einstein condensate// *Theor. and Mathem. Phys.* V. 162(1), 95–105 (2010).
- [65] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Temperature jump in degenerate quantum gases with the Bogoliubov excitation energy and in the presence of the Bose–Einstein condensate// *Theor. and Mathem. Physics*, **165**(1): 1359–1371 (2010).
- [66] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* A new method for solving the boundary value problem in kinetic theory A. V. Latyshev, A. A. Yushkanov *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 2012, 52:3, 539–552.
- [67] *Latyshev A.V., Yushkanov A.A.* Boundary value problem for quantum Bose–gases// *Isvestiya vysshih uchebnyh zavedenii (in russian). Ser. "Fizika".* 2002. №6. C. 51–56.
- [68] *Bedrikova E.A., Latyshev A.V.* Mass velocity of Bose-gas in the problem about isothermal sliding// *arXiv:1208.5231v1 [math-ph]* 26 Aug 2012, 17 p.
- [69] *Ivanisenko P.V., Latyshev A.V.* The Kramers problem for quantum fermi-gases with constant collision frequency and specular - diffusive boundary conditions//*arXiv:1202.2647 v1 [math-ph]* 13 Feb 2012, 51 pp.